МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

І. А. Дичка, М. В. Онай, Р. А. Гадиняк

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ. РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ: ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для студентів, які навчаються за спеціальністю 121 «Інженерія програмного забезпечення», спеціалізацією «Програмне забезпечення комп’ютерних та інформаційно-пошукових систем»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Рецензент *Романкевич В. О.*, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний
редактор *Сулема Є. С.*, канд. техн. наук, доц.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 7 від 29.03.2018 р.)
за поданням Вченої ради факультету прикладної математики
(протокол № 8 від 26.03.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Дичка Іван Андрійович, д-р техн. наук, проф.
Онай Микола Володимирович, канд. техн. наук, старший викладач
Гадиняк Руслан Анатолійович, асистент

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ: ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Чисельні методи. Розв'язання задач лінійної алгебри та нелінійних рівнянь: лабораторний практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення», спеціалізації «Програмне забезпечення комп'ютерних та інформаційно-пошукових систем» / І. А. Дичка, М. В. Онай, Р. А. Гадиняк ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,85 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 95с.

Навчальний посібник розроблено для ознайомлення студентів з теоретичними відомостями та практичними прийомами розв'язання математичних задач за допомогою комп'ютерних засобів, а також вимогами до виконання лабораторних робіт, зокрема правилами їх оформлення. Навчальне видання призначене для студентів, які навчаються за спеціальністю 121 Інженерія програмного забезпечення, спеціалізацією «Програмне забезпечення комп'ютерних та інформаційно-пошукових систем» факультету прикладної математики КПІ ім. Ігоря Сікорського.

ЗМІСТ

ВСТУП

Прості математичні задачі малої розмірності, що вивчаються в курсі математичного аналізу та лінійної алгебри, допускають можливість отримання аналітичних розв’язків. В той же час при моделюванні систем та процесів виникають складні математичні задачі великої розмірності, які можуть не мати аналітичних розв’язків та вимагати застосування чисельних методів, що вивчаються в рамках відповідної дисципліни. До того ж складні математичні задачі розв’язувати вручну майже неможливо, тому виникає необхідність у застосуванні комп’ютерних засобів у поєднанні з чисельними методами для розв’язання таких задач. Тому сфера застосувань чисельних методів є досить широкою.

У даних методичних вказівках розглядаються основні принципи та практичні прийоми побудови методів та алгоритмів розв’язання математичних задач на комп’ютері. Методичні вказівки складаються з 3 розділів, кожен з яких присвячений виконанню певної лабораторної роботи з дисципліни «Чисельні методи», яка входить до складу циклу професійної підготовки навчального плану підготовки бакалаврів за спеціальністю 121 «Інженерія програмного забезпечення».

В кожному розділі надаються короткі теоретичні відомості з певної теми, завдання на лабораторну роботу з цієї теми, вказівки щодо виконання завдання, а також наводяться вимоги до оформлення звіту з виконаної лабораторної роботи та контрольні питання для самоперевірки.

Лабораторні роботи з дисципліни «Чисельні методи» розраховані на 54 академічні години аудиторних занять.

Загальні вимоги до оформлення звіту з лабораторних робіт

Лабораторна робота має бути подана в електронному та друкованому вигляді.

Електронна версія зберігається в банку даних кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем ФПМ КПІ ім. Ігоря Сікорського. Файл з копією лабораторної роботи здається на кафедру разом з друкованим примірником безпосередньо під час захисту. Формат файлу *.docx або *.doc, або *.*rtf*, або *.*pdf*.

Звіт необхідно друкувати на одному боці аркуша білого паперу формату А4 (210х297 мм).

Основний текст звіту має бути набраний з дотриманням таких вимог:

- шрифт Times New Roman 14 пт;
- відступ першого рядка 12.5 мм ;
- міжрядковий інтервал 1.5;
- вирівнювання по ширині;
- поля: верхнє та нижнє – 20 мм; ліве – 30 мм; праве – 15 мм;
- від краю до верхнього/нижнього колонтитула 12.5 мм.

Текст в таблицях має бути набраний з дотриманням таких вимог (при необхідності дозволяється таблиці розміщувати в альбомному форматі):

- шрифт Times New Roman 12 пт;
- міжрядковий інтервал 1.0;
- інтервал перед 6 пт;
- інтервал після 6 пт.

Всі рисунки повинні мати під рисунковий напис. Підрисунковий напис вирівнюється по центру і починається зі скорочення "Рис.", потім ставиться пробіл та порядковий номер рисунку. Після номера рисунка ставиться крапка, пробіл та пишеться назва рисунка.

На всі рисунки розміщені у звіті має бути посилання в тексті звіту. Посилання на рисунок у тексті виконується за його номером, розташованим після скорочення “рис.”.

Нумерацію сторінок виконують арабськими цифрами. Першою сторінкою звіту з лабораторної роботи є оформлений за зразком титульний аркуш, який включають до загальної нумерації, але номер сторінки на ньому не проставляють. На всіх наступних сторінках обов’язково проставляють у правому нижньому куті номер сторінки без крапки в кінці використовуючи шрифт Times New Roman 10 пт.

На кожній сторінці, окрім титульної, в правому верхньому куті має бути надруковано прізвище, ініціали студента та номер групи.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1. НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНИМ НЕВІДОМИМ

Мета роботи: опанувати методи наближеного розв'язання нелінійних рівнянь.

Equation Chapter (Next) Section 1

Теоретичні відомості

Розглянемо задачу обчислення коренів рівняння виду

$$f(x) = 0, \tag{1.1}$$

де $f: R_1 \to R_1$ – алгебраїчна або трансцендентна функція. Такі рівняння називають скалярними.

Процедура розв'язання нелінійних рівнянь складається з двох етапів: локалізація коренів і подальше уточнення коренів.

Впевнитись, що на певному відрізку $[a; b]$ дійсно є нуль неперервної функції $f(x)$, можна аналітичним способом використовуючи наведені нижче теореми або графічним способом.

Теорема 1.1 (Больцано-Коші). *Якщо неперервна на відрізку* $[a; b]$ *функція* $f(x)$ *на його кінцях приймає протилежні знаки, тобто*

$$f(a) f(b) < 0, \tag{1.2}$$

то на проміжку $(a; b)$ *вона хоча б один раз обертається в нуль.*

Теорема 1.2. *Неперервна строго монотонна функція* $f(x)$ *має й до того ж єдиний нуль на відрізку* $[a; b]$ *тоді та тільки тоді, коли на його кінцях вона приймає значення різних знаків.*

Теорема 1.3. *Нехай* $f \in C^1[a;b]$. *Тоді, якщо* $f'(x)$ *не змінює знак на* $(a;b)$, *то умова (1.2) є необхідною та достатньою для того, щоб рівняння (1.1) мало й до того ж єдиний корінь на* $[a;b]$.

Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна при всіх $x \in [a;b]$ та на $[a;b]$ змінює знак. Візьмемо довільну точку $c \in (a;b)$. Якщо на відрізку $[a;b]$ існує єдиний корінь, то наступні ситуації є взаємовиключними:

- $f(a)f(c) < 0$ – корінь знаходиться на інтервалі $(a;c)$;
- $f(c)f(b) < 0$ – корінь знаходиться на інтервалі $(c;b)$;
- $f(c) = 0$ – точка c є шуканим коренем.

Далі ця процедура може бути застосована для відрізків $[a;c]$ або $[c;b]$ відповідно та повторюватись циклічно.

Метод поділу навпіл

Метод поділу навпіл реалізує найпростіший спосіб вибору пробної точки – поділ проміжку існування кореня навпіл. Якщо за *k*-те наближення цим методом до кореня ξ рівняння (1.1) візьмемо x_k, що є серединою отриманого на *k*-му кроці відрізку $[a_k;b_k]$ в результаті послідовного звуження даного відрізку $[a;b]$, приймаючи $a_1 = a$, $b_1 = b$, тоді прийдемо до нерівності

$$|\xi - x_k| < \frac{b-a}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Нерівність (1.3) є апріорною оцінкою абсолютної похибки отриманого кореня та дає можливість обчислити кількість кроків (ітерацій) методу поділу навпіл, яка є достатньою для отримання кореня ξ з заданою точністю ε.

Метод хорд

Можливо досягти кращих результатів збіжності, якщо відрізок $[a;b]$ поділити точкою c на частини не навпіл, а пропорційно величинам ординат $f(b)$ та $f(a)$ графіка даної функції $f(x)$:

$$c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}. \tag{1.4}$$

Метод Ньютона (метод дотичних)

Ітераційний процес метода Ньютона визначається наступною формулою

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{1.5}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$ та вважається, що на елементах послідовності (x_k) перша похідна даної функції не дорівнює нулю.

Теорема 1.4. *Нехай на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ має першу (не дорівнює нулю) та другу похідні сталого знаку та нехай*

$$f(a)f(b) < 0.$$

Тоді якщо точка x_0 обрана на $[a;b]$ таким чином, що

$$f(x_0)f''(x_0) > 0, \tag{1.6}$$

то послідовність (x_k), що починається з x_0 та визначається методом Ньютона (1.5), монотонно збігається до кореня $\xi \in (a;b)$ рівняння (1.1).

Модифікації метода Ньютона

Найпростішим способом спрощення метода Ньютона є використання одного й того ж крокового множника $\frac{1}{f'(x_0)}$, тобто виконання обчислення за формулою

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \tag{1.7}$$

де $k \in \mathbb{N}_0$. Такий метод називають *спрощеним методом Ньютона*.

Якщо завчасно відомо, що число m – показник кратності кореня ξ, то для збільшення швидкості збіжності метода Ньютона в формулу (1.5) рекомендується ввести корегуючий параметр m:

$$x_{k+1} = x_k - m \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{1.8}$$

Таку модифікацію називають *методом Ньютона-Шрьодера*, також цей метод називають *методом Ньютона з параметром*.

Однією з модифікацій метода Ньютона (1.5), яка має надлінійну збіжність є *різницевий або дискретний метод Ньютона*, що визначається за наступною ітераційною формулою

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot h_k}{f(x_k + h) - f(x_k)}, \tag{1.9}$$

де $k \in \mathbb{N}_0$, а h_k – малий параметр, котрим повинен розпоряджатися обчислювач.

Розглядаючи різноманітні способи задання параметра h_k можна отримати ітераційні формули *метода Стефенсена*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\left(f(x_k)\right)^2}{f\left(x_k + f(x_k)\right) - f(x_k)} \tag{1.10}$$

та ітераційні формули *метода січних*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)}, \qquad (1.11)$$

де $k \in \mathbb{N}$, а значення x_0 та x_1 задаються обчислювачем.

Доведено, що метод січних має порядок збіжності принаймні $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

Широковживаним класом методів розв'язання нелінійних рівнянь є гібридні методи. Одним з представників цього класу методів є метод хорд-дотичних. В цьому методі послідовно обчислюється $x_k^{хорд}$ та $x_k^{дот}$ за методом хорд та дотичних відповідно.

Метод простих ітерацій

Розглянемо рівняння

$$x = \varphi(x). \qquad (1.12)$$

Функцію $\varphi(x)$ будемо вважати неперервною в області осі *Ox*, що досліджується.

Знаходження коренів рівнянь виду (1.12) називається *задачею про нерухому точку*.

Визначення 1.1. *Неперервна функція $\varphi(x)$ називається стискальною (функцією стиснення) на відрізку $[a, b]$, якщо*

1) $\varphi(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$;

2) $\exists\, q \in (0, 1): \quad |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le q|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.

В тому випадку коли на деякому проміжку $[a, b]$ функція $\varphi(x)$ задовольняє умовам стиснення, що зафіксовані визначенням 1.1 рівняння $x = \varphi(x)$ має й при тому єдиний корінь $\xi \in [a, b]$.

Теорема 1.5. *Нехай функція* $\varphi(x)$ *визначена та диференційовна на відрізку* $[a,b]$. *Тоді якщо виконуються умови:*

1) $\varphi(x)\in[a,b] \quad \forall x\in[a,b]$,

2) $\exists\, q: |\varphi'(x)|\le q<1 \quad \forall x\in(a,b)$,

то рівняння $x=\varphi(x)$ *має й притому єдиний на* $[a,b]$ *корінь* ξ*; до кореня* ξ *збігається визначена методом простих ітерацій* $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ *послідовність, починаючи з будь-якого* $x_0\in[a,b]$*; при цьому є справедливими оцінки похибки* $\forall k\in\mathbb{N}$*:*

$$|\xi-x_k|\le\frac{q}{1-q}|x_k-x_{k-1}|, \tag{1.13}$$

$$|\xi-x_k|\le\frac{q^k}{1-q}|x_1-x_0|. \tag{1.14}$$

Отриману апостеріорну оцінку (1.13) можна використовувати на практиці для отримання критерія завершення ітераційного процесу.

Апріорну оцінку (1.14) можна використовувати для обчислення необхідної кількості ітерацій, що є достатньою для отримання кореня з заданою точністю ξ.

В загальному випадку перехід від (1.1) до (1.12) здійснюється таким чином: множать ліву та праву частину рівняння (1.1) на відмінний від нуля параметр $-\lambda$ та до обох частин додають x; в результаті отримують рівнозначне (1.1) рівняння

$$x=x-\lambda f(x), \tag{1.15}$$

яке має вигляд (1.12), де $\varphi(x)=x-\lambda f(x)$. Далі параметр λ підбирається таким, щоб похідна $\varphi'(x)=1-\lambda f'(x)$ в потрібній області була малою за модулем, а якщо потрібно, то й мала певний сталий знак.

Конкретні рекомендації по фіксуванню λ в (1.15) можуть бути дані у випадку, коли, наприклад, відомі оцінки зверху та знизу для похідної початкової функції $f(x)$.

Методи розв'язання алгебраїчних рівнянь

Алгебраїчне рівняння є частковим випадком нелінійного рівняння, тому всі розглянуті нами методи для розв'язання нелінійних рівнянь є справедливими для алгебраїчних рівнянь. Окрім цього для розв'язання алгебраїчних рівняння існують методи, що не вимагають локалізації коренів, але вони дають більшу похибку ніж загальні методи розв'язання нелінійних рівнянь застосовані для алгебраїчного рівняння.

Розглянемо алгебраїчне рівняння

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0, \tag{1.16}$$

де a_i – дійсні числа, z – комплексна змінна.

Всі корені рівняння (1.16) мають задовольняти нерівність

$$|z| < 1 + \frac{A}{|a_n|}, \tag{1.17}$$

де $A = \max\{\,|a_0|, |a_1|, ..., |a_{n-1}|\,\}$.

Виконаємо заміну $z = \dfrac{1}{y}$ в рівнянні (1.16), отримаємо

$$P(z) = \frac{1}{y^n} Q(y), \tag{1.18}$$

де $Q(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{n-i}$.

Корені $y_k = \dfrac{1}{z_k}$ $\left(k = \overline{1..n}\right)$ поліному $Q(y)$ мають задовольняти нерівність (1.17), тобто

$$|z_k| > \frac{1}{1 + \dfrac{B}{|a_0|}}, \tag{1.19}$$

де $B = \max\left\{\, |a_1|, |a_2|, ..., |a_n| \,\right\}$.

Ввівши позначення $R = 1 + \dfrac{A}{|a_n|}$ та $r = \dfrac{1}{1 + \dfrac{B}{|a_0|}}$ можна стверджувати, що всі корені рівняння (1.16) розміщені в кільці

$$r < |z| < R. \tag{1.20}$$

Отже, числа r та R є відповідно нижньою та верхньою границями додатних коренів рівняння (1.16).

Припустимо, що всі коефіцієнти рівняння (1.16) дійсні і $a_n > 0$ та це рівняння має дійсні корені, тому замінимо змінну z на x.

Теорема 1.6 (теорема Лагранжа). *Нехай* $a_n > 0$ *та* $a_{n-k+1}\,(k > 1)$ *перший зліва з від'ємних коефіцієнтів полінома* $P(x) = 0$. *Тоді за верхню границю додатних коренів рівняння* $P(x) = 0$ *може бути прийняте число*

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{C}{a_n}}, \tag{1.21}$$

де C *– найбільша з абсолютних величин від'ємних коефіцієнтів поліному* $P(x)$.

Теорема 1.7 (теорема Вестерфільда). *Модулі всіх коренів приведеного многочлена* $P_n(x)$ *(тобто при* $a_n = 1$*) знаходяться в колі, радіус якого не перевищує суми двох найбільших з чисел* $\sqrt[t]{|a_{n-t}|}$, *де* $t = \overline{1..n}$.

Зрозуміло, що будь-який метод знаходження верхньої границі додатних коренів можна пристосувати для знаходження нижньої (лівої) границі від'ємних коренів.

Одним з найбільш ефективних методів знаходження *всіх або майже всіх* коренів алгебраїчного рівняння, як дійсних так і комплексних, є *метод Лобачевського*, запропонований в 1834 р. Цей метод називають також *методом Лобачевського-Греффе* або *методом Дандлена* на честь швейцарського математика Греффе та французького математика Дандлена, що були також причетні до однієї з перших версій цього методу.

Розглянемо випадок коли алгебраїчне рівняння має *різні за абсолютною величиною дійсні корені*.

Нехай дано рівняння

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0, \tag{1.22}$$

про корені якого відомо, що всі вони дійсні та задовольняють умову

$$|x_1| \gg |x_2| \gg \ldots \gg |x_n|. \tag{1.23}$$

Розглянемо процес кадрування коренів. Запишемо рівняння (1.22) у такому вигляді:

$$a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x - x_i \right) = 0 \tag{1.24}$$

Рівняння, корені якого протилежні за знаком кореням рівняння (1.24) буде мати вигляд:

$$a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x + x_i \right) = 0 \tag{1.25}$$

Перемножуючи ці два рівняння, отримаємо:

$$a_n^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x^2 - x_i^2 \right) = 0. \tag{1.26}$$

Позначимо коефіцієнти останнього рівняння, як b_k $\left(k=\overline{0..n}\right)$, тобто коефіцієнт b_k буде при x^{2k} та отримується з коефіцієнтів початкового рівняння наступним чином:

$$b_k = a_k^2 + 2\cdot\sum_{j=1}^{n-k}(-1)^j a_{k-j}a_{k+j}\,,\quad k=\overline{0..n}. \tag{1.27}$$

Нехай ми виконали p раз процес квадрування коренів та отримали рівняння

$$\sum_{i=0}^{n} b_i y^i = 0 \tag{1.28}$$

Коренями цього рівняння є числа $y_k = -x_k^{2^p}$ $\left(k=\overline{1..n}\right)$, звідки отримуємо:

$$x_k = \pm\sqrt[2^p]{-y_k} = \sqrt[2^p]{\frac{b_{n+k-2}}{b_{n+k-1}}}\quad \left(k=\overline{1..n}\right). \tag{1.29}$$

Виконаємо квадрування коренів рівняння (1.28), нехай після цього отримано рівняння:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i z^i = 0\,, \tag{1.30}$$

для якого виконуються співвідношення

$$c_k = b_k^2\,,\quad k=\overline{0..n}\,, \tag{1.31}$$

та є очевидним що:

$$|\,x_k\,| = \sqrt[2^{p+1}]{\frac{c_{n+k-2}}{c_{n+k-1}}} = \sqrt[2^p]{\frac{b_{n+k-2}}{b_{n+k-1}}}\,. \tag{1.32}$$

Таким чином, при виконанні умови (1.31) ми не можемо збільшити точність обчислення коренів.

Тому *процес квадрування продовжується поки подвійні добутки не перестануть впливати на перші головні члени коефіцієнтів перетвореного рівняння*.

Якщо корені потрібно знайти з більшою точністю, то після обчислення їх наближених значень за методом Лобачевського доцільно провести їх уточнення, використовуючи загальні методи розв’язання нелінійних рівнянь. Застосування цих методів для уточнення вимагає меншого об’єму обчислень та дозволяє уникнути труднощів роботи з дуже великими числами, з якими приходиться зустрічатися в методі Лобачевського.

Завдання на лабораторну роботу

1. Розробити програму на мові програмування *C#* у середовищі розробки Visual Studio 2013 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та реалізовувати метод Лобачевського розв’язання алгебраїчних рівнянь і дозволяти уточнювати (точність та проміжок локалізації задаються користувачем з клавіатури) корені будь-яких нелінійних рівнянь методами, що задані за варіантом (*табл.* 1.1, *табл.* 1.4). Розроблена програма повинна виводити на екран всі проміжні результати.

2. За допомогою розробленої програми з п.1 розв'язати задані за варіантом рівняння (*табл.* 1.1, *табл.* 1.2) на заданому проміжку з точністю $\varepsilon \le 10^{-7}$.

3. При виконанні завдання з п.2 необхідно побудувати графіки залежності наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій починаючи з початкового наближення. Якщо рівняння має більше двох коренів, то побудувати графіки для двох будь-яких коренів.

4. Знайти верхню та нижню границю додатних і від’ємних коренів заданого за варіантом алгебраїчного рівняння (*табл.* 1.3).

5. За допомогою розробленої програми з п.1, знайти корені, заданого за варіантом алгебраїчного рівняння (*табл.* 1.3), методом Лобачевського та уточнити отримані корені будь-яким методом розв’язання нелінійних рівнянь.

6. Задані за варіантом, рівняння розв’язати у MatLab 7.0 (або вище) або у MathCAD 15.0 (або вище), або у Mathematica 7.0 (або вище). Задане за варіантом, алгебраїчного рівняння необхідно розв’язати, як мінімум двома функціями наявними у відповідному математичному пакеті. Наприклад, в математичному пакеті MatLab 7.0 наявна функція solve для розв’язання будь-якого нелінійного рівняння та функція roots для розв’язання алгебраїчного рівняння.

Вказівки щодо виконання завдання

Програма розв’язання нелінійних рівнянь, написана в математичному паекті, має будувати графіки для локалізації коренів та знаходити корені на локалізованому проміжку. Якщо буде обрано математичний пакет *MatLab*, то програма має бути написана, як файл-функція, яку можна викликати з командного рядка. Вхідним параметрами даної функції має бути номер рівняння, а вихідним параметром масив коренів даного рівняння.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт має включати:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підгрунття для виконання даної лабораторної роботи (перелік формул, що були використані при розробленні програми мовою програмування C#).
3. Основні етапи процесу локалізації коренів рівняння, що розв'язується.
4. Значення коренів, заданих за варіантом, рівнянь (*табл.* 1.1, *табл.* 1.2) отриманих кожним з методів:

Рівняння № ____

Метод	C#	MatLab або MathCAD або Mathematica

5. Графік залежності наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій починаючи з початкового наближення.
6. Процес знаходження верхньої та нижньої границі додатних і від'ємних коренів, заданого за варіантом алгебраїчного рівняння (*табл.* 1.3).
7. Значення коренів, заданого за варіантом, алгебраїчного рівняння (*табл.* 1.3):

Алгебраїчне рівняння

Метод	C#	MatLab або MathCAD або Mathematica

8. Висновки.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №
1	4
2	19
3	15
4	7
5	14
6	2
7	22
8	24
9	20
10	9
11	25
12	8
13	17

№ за списком викладача	Варіант №
14	13
15	16
16	3
17	12
18	5
19	21
20	6
21	23
22	1
23	10
24	11
25	18

Таблиця 1.1. Розподіл рівнянь та методів за варіантами

Варіант №	Рівняння №	Методи
1	15	4
	27	0, 8
2	8	7
	35	1, 8
3	3	8, 1
	30	3
4	17	0
	21	3, 8
5	4	1
	19	2, 8
6	28	0
	13	5, 8
7	7	0
	26	7, 8
8	47	1
	43	5, 8
9	14	1
	33	4, 8
10	48	7
	45	8, 1
11	20	6, 8
	9	1
12	46	0
	41	8, 5
13	40	0
	49	3, 8
14	2	1
	22	7, 8
15	23	8
	12	0, 3
16	11	8
	29	1, 5

Продовження табл. 1.1

Варіант №	Рівняння №	Методи
17	5	6
	34	1, 8
18	25	7
	10	0, 8
19	24	1
	16	3, 8
20	44	3
	39	0, 8
21	42	8
	37	0, 6
22	36	1
	1	4, 8
23	6	7
	32	1, 8
24	18	3
	31	0, 8
25	50	5
	38	1, 8

Таблиця 1.2. Перелік нелінійних рівнянь

№	Рівняння	Проміжок
1	$e^x + \sin x = 10x - x^{10} - e^{\cos x}$	$(-\infty; \infty)$
2	$e^{x^5} + \sin x - 10x = x^9 - \sin(\cos x)$	$(-\infty; \infty)$
3	$tgx = 10x - \sin(e^x) - x^5 + e^{\cos x}$	$[-1.5; 1.5]$
4	$x^2 - \cos^2 x + \sin x = \sqrt{13 + x}$	$[-13; \infty)$
5	$\sqrt{1 + \cos x} = e^{\sqrt{\lvert x \rvert}} - \cos^2 x + x^3$	$(-\infty; \infty)$

Продовження табл. 1.2

№	Рівняння	Проміжок
6	$\ln\left(1+x^2\right)-\sin^3 x+x=\sqrt{1+\cos x^3}$	$(-\infty;\infty)$
7	$1+x^7-\ln\left(1+\pi\cos x^3\right)+x^{10}=tg^5 x-x$	$[-1.2;1.2]$
8	$5+x^7\cdot\sin x=x^{13}\cdot\cos(x)\cdot\sqrt{\pi-\cos x^3}$	$[-2.0;10.0]$
9	$x^{13}-ch^5 x+x+x^{30}+5=\ln\left(5+\pi\cdot shx^3\right)^2$	$[-3.0;3.0]$
10	$x^{13}\cdot chx+x^5\cdot shx+x^{15}\cdot\sin x=-13$	$[-4.0;4.0]$
11	$x\cdot chx+x^5\cdot\sin x=-13x-e^x$	$[-10.0;10.0]$
12	$13\sin x\cdot\left(\log_2\left(x\cdot e^x+32\right)+shx^2\right)=x^2$	$[-4.0;4.0]$
13	$e^{chx}+x^5+x^{15}\sin x=13$	$[-4.0;4.0]$
14	$chx+shx+x^2\cdot\log_{10}\lvert x\rvert=x^3+5$	$(-\infty;\infty)$
15	$\cos^3 x+x^2\cdot\log_2\left(shx+chx\right)=x^2-15$	$(-\infty;\infty)$
16	$\cos^3 x+x^3\cdot\left(\log_2\left(shx+chx\right)\right)^3-x^3=5$	$(-\infty;\infty)$
17	$\cos^3 x+x^3 shx-x^5=35$	$(-\infty;\infty)$
18	$\cos^3 x+x^3 e^x=x^6+35$	$(-\infty;\infty)$
19	$x^2+x^3+35=x^6$	$(-\infty;\infty)$
20	$x\sin x+x^5+35=x^3$	$(-\infty;\infty)$
21	$\sin^3 x+x^3=x^2-35$	$(-\infty;\infty)$
22	$\sin^2 x+x^4-x^2=\cos^2 x+13x+10$	$(-\infty;\infty)$

Продовження табл. 1.2

№	Рівняння	Проміжок
23	$\sqrt{\lvert\sin x\rvert}+x^3=\cos x+x+10$	$(-\infty;\infty)$
24	$x^3-\cos^2 x-5x=3$	$(-\infty;\infty)$
25	$x^4-\sin^2 x=7x+3$	$(-\infty;\infty)$
26	$\sqrt{\lvert x\rvert}-9x^2+23=\sin x$	$(-\infty;\infty)$
27	$x\sin x=-3\pi$	$[-20.0;20.0]$
28	$x^2\cos x+\log_2 e^x+\pi=9\pi x^3$	$(-\infty;\infty)$
29	$x^2\sin x+3\pi=0$	$[-20.0;20.0]$
30	$x^3\cos x+\pi=9\pi x$	$[-20.0;20.0]$
31	$x^3 chx+\pi-9\pi x=0$	$[-10.0;10.0]$
32	$x^3 shx+\pi=9\pi x$	$[-10.0;10.0]$
33	$x\sin(\pi x)+\pi=\log_2(13\pi\lvert x\rvert)$	$[-10.0;10.0]$
34	$x^2\cos x\sin x+\pi=x$	$[-10.0;10.0]$
35	$x^2+\pi\log_{10}(13\pi)=5\pi\sin x+2x$	$(-\infty;\infty)$
36	$x^2+\pi\log_2(5\pi)=7\pi\cos x+3x$	$(-\infty;\infty)$
37	$x^3-7\sin(\pi x)+\cos(\pi\log_2(5\pi))=3x$	$[-10.0;10.0]$
38	$x^3\cos(x-\pi)+13x+9\cdot e^x\cdot\sin x=0$	$[-10.0;10.0]$
39	$x\sin 5x-5\cdot e^{x-3\pi}\cdot\cos x=0$	$[-2.0;2.0]$

Продовження табл. 1.2

№	Рівняння	Проміжок
40	$\operatorname{sh} x \cdot \sin 7x = 5e^x \cos x$	$[-3.0; 3.0]$
41	$\operatorname{ch} x \cdot \sin e^x = 5e^x \cos x$	$[4.0; 5.0]$
42	$\pi \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin(\pi x) + x^2 = 5 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos x$	$[-5.0; 5.0]$
43	$\sqrt{5-x} \cdot \sin x + x\cos(\pi - x) = 0$	$[-15.0; 5.0)$
44	$\sqrt[3]{5-x}\cos x + x\sin(\pi - 2x) = 0$	$[-10.0; 5.0]$
45	$x \cdot \sin x \cdot \log_2(17 - x) = 0.5 \cdot e \cdot x$	$[-15.0; 15.0]$
46	$x\sin e^x + 0.5x = 0$	$[-5.0; 3.0]$
47	$x \cdot \cos(\operatorname{ch}(x - \pi)) + 0.3x = 0$	$[-1.0; 5.0]$
48	$e^{\sin x} + 0.3x = 0$	$(-\infty; \infty)$
49	$e^{\sin x + \cos x + 1} = 3 \cdot \ln x$	$(0; 10)$
50	$3 \cdot \log_{10}(11 \cdot \pi \cdot x + 190) = 13 \cdot \sin(e^x) - 0.5 \cdot \operatorname{sh} x$	$(-\infty; \infty)$

Таблиця 1.3. Перелік алгебраїчних рівнянь

№	Коефіцієнти алгебраїчного рівняння $a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0x=0$							
	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	55	–336	297	869	–823	–561	63	23
2	–2	71	–171	–589	825	772	–638	–3
3	61	494	680	–636	–777	420	69	–16
4	50	717	675	–887	–791	165	96	–7
5	–74	–789	–840	907	730	–348	–50	19
6	17	268	472	–837	–744	414	124	–34
7	2	48	–67	–722	–141	988	–288	–14
8	–55	119	280	–634	–209	514	131	3
9	–66	73	763	179	–737	–406	–12	15
10	–29	121	363	–783	–924	728	386	5
11	–10	187	–199	–774	585	921	–295	–318
12	8	126	–478	111	936	–720	–78	64
13	150	249	–661	–905	885	917	–290	–256
14	1	–26	–84	555	499	–991	–838	32
15	–136	24	650	–124	–795	145	157	–1

Продовження табл. 1.3

№	Коефіцієнти алгебраїчного рівняння $a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0x=0$							
	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
16	31	–210	–449	850	916	–809	–139	25
17	–42	251	856	–762	–960	628	173	–76
18	82	–251	–943	976	610	–383	–51	11
19	–46	–257	–146	831	819	–596	–568	78
20	33	–37	–432	159	971	–184	–73	14
21	–48	–29	724	–657	–772	726	–25	–12
22	–278	747	625	–966	–207	275	–4	–5
23	–24	219	–207	–963	997	952	–448	–131
24	18	84	–225	–811	565	842	–437	–62
25	12	0	–460	–742	572	742	4	–55

Таблиця 1.4. Перелік методів

№	**Метод**
0	Метод поділу навпіл
1	Метод хорд
2	Метод Ньютона
3	Спрощений метод Ньютона
4	Дискретний метод Ньютона
5	Метод Стефенсена
6	Метод січних
7	Комбінований метод (метод хорд-дотичних)
8	Метод простих ітерацій

Питання для самоперевірки

1. Яким чином виконується локалізація коренів трансцендентного рівняння?
2. Теорема Больцано-Коші.
3. Як можна доповнити теорему Больцано-Коші, щоб функція мала єдиний нуль на заданому проміжку?
4. Який ітераційний процес називається лінійно збіжним?
5. Яку швидкість збіжності має лінійно збіжний ітераційний процес?
6. Коли ітераційний процес має порядок *p* збіжності?
7. Який ітераційний метод називають глобально збіжним? Наведіть приклади.
8. Який ітераційний метод називають локально збіжним? Наведіть приклади.
9. В чому полягає різниця між методом поділу навпіл та методом хорд?
10. Виходячи з яких міркувань отримують правила побудови ітераційного методу Ньютона?
11. Чому в методі Ньютона першу похідну обмежують знизу, а другу – зверху?
12. В чому полягають переваги та недоліки спрощеного методу Ньютона?
13. Коли доцільно використовувати метод Ньютона з параметром?
14. Як отримати ітераційні формули дискретного метода Ньютона та метода Стефенсена?
15. Виходячи з яких міркувань отримують правила побудови ітераційного методу січних?
16. Ідея та приклад побудови гібридних методів розв’язання нелінійних рівнянь
17. Як формулюється задача про нерухому точку?

18. Яка умова збіжності методу простих ітерацій для розв’язання нелінійного рівняння?
19. Який критерій зупинку ітераційного процесу методу простих ітерацій для розв’язання нелінійного рівняння?
20. В якому випадку є коректним спрощений критерій зупинки ітераційного процесу методу простих ітерацій?
21. Як звести будь-яке нелінійне рівняння до вигляду придатного для застосування методу простих ітерацій?
22. Сформулювати основну теорему алгебри.
23. На основі яких міркувань можна визначити нижню та верхню границю додатних/від’ємних коренів алгебраїчного рівняння?
24. Метод Лагранжа визначення нижньої та верхньої границі додатних/від’ємних коренів алгебраїчного рівняння.
25. Метод Вестерфільда визначення нижньої та верхньої границі додатних/від’ємних коренів алгебраїчного рівняння.
26. Як визначити кількість додатних коренів алгебраїчного рівняння?
27. Метод Лобачевського розв’язання алгебраїчних рівнянь.

Рекомендована література

1. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Том первый. Издание второе, стереотипное. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 464 с.
2. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Том второй. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 620 с.
3. *Бут Э.Д.* Численные методы / Под ред. В.М. Курочкина. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 240 с.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2. ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР ТА ОБЧИСЛЕННЯ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ

Мета роботи: набути вміння та навички використання прямих методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь і обчислення обернених матриць та застосування систем комп'ютерної математики, а також закріплення, поглиблення й узагальнення теоретичних знань щодо методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь і обчислення обернених матриць.

Equation Section (Next)

Теоретичні відомості

Під системою лінійних алгебраїчних рівнянь мається на увазі система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{nn+1}, \end{cases} \tag{2.1}$$

або в термінології векторно-матричних рівнянь

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.2}$$

де $\mathbf{b} = \left(b_1; b_2; \ldots; b_n\right)^T = \left(a_{1n+1}; a_{2n+1}; \ldots; a_{nn+1}\right)^T$ – вектор вільних членів та $\mathbf{x} = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)^T$ – вектор невідомих з дійсними координатами, а $A = \left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ – дійсна $n \times n$-матриця коефіцієнтів даної системи.

Метод розв'язання відноситься до класу прямих (точних), якщо враховуючи припущення про відсутність округлення, він дає точний розв'язок задачі після скінченної кількості арифметичних та логічних операцій. Якщо кількість ненульових елементів матриці має порядок n^2, то для більшості точних методів розв'язання СЛАР необхідна кількість операцій має порядок n^3.

Метод Гаусса

Найбільш відомим з точних методів є метод Гаусса. Він складається з двох сукупностей операцій, які умовно називають прямим та зворотним ходом.

Припустивши, що $a_{11} \neq 0$, перше рівняння системи ділимо на коефіцієнт a_{11}, в результаті отримуємо рівняння

$$x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}^{(1)} \cdot x_j = a_{1n+1}^{(1)}$$

Потім від інших рівнянь, окрім першого, віднімається перше рівняння помножене на відповідний коефіцієнт a_{i1}. В результаті ці рівняння перетворюються до вигляду

$$\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} \cdot x_j = a_{i\,n+1}^{(1)}\ ,\ i = 2, \ldots, n\,.$$

Отже, перше невідоме виявилось виключеним зі всіх рівнянь, окрім першого.

Тобто на першому кроці коефіцієнти першого рівняння обчислюються за формулами: $a_{1j}^{(1)} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$, де $j = 2, 3, \ldots, n+1$. Коефіцієнти інших рівнянь знаходяться за формулами: $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}^{(1)} \cdot a_{i1}$, де $i = 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$.

Далі припускаючи, що $a_{22}^{(1)} \neq 0$, ділимо друге рівняння на коефіцієнт $a_{22}^{(1)}$ та виключаємо невідому x_2 зі всіх рівнянь, починаючи з третього, і т.д.

В результаті послідовного виключення невідомих система рівнянь перетворюється в систему рівнянь з трикутною матрицею

$$x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i\,j}^{(i)} x_j = a_{i\,n+1}^{(i)},\ i = 1,\ldots,n. \qquad (2.3)$$

Сукупність наведених обчислень, в ході яких вихідна задача перетворилася до вигляду (2.3), називається прямим ходом метода Гаусса.

Узагальнимо формули для обчислення коефіцієнтів при прямому ході:

$$a_{k\,j}^{(0)} = a_{k\,j},\ k = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,n+1;$$

$$a_{k\,j}^{(k)} = \frac{a_{k\,j}^{(k-1)}}{a_{k\,k}^{(k-1)}}, \quad k = 1,2,\ldots,n; \qquad (2.4)$$

$$a_{i\,j}^{(k)} = a_{i\,j}^{(k-1)} - a_{k\,j}^{(k)} \cdot a_{i\,k}^{(k-1)}, \quad k = 1,2,\ldots,n-1, \qquad (2.5)$$

де $i = k+1,\ldots,n$; $j = k, k+1,\ldots,n+1$.

Трикутна структура системи (2.3) дозволяє послідовно один за одним обчислювати значення невідомих, починаючи з останнього:

$$x_t = a_{t\,n+1}^{(t)} - \sum_{j=t+1}^{n} a_{t\,j}^{(t)} x_j, \qquad (2.6)$$

де $t = n, n-1,\ldots,2,1$ та сума дорівнює нулю, якщо нижня межа підсумовування у знака суми має значення більше верхнього.

Процес послідовного обчислення значень невідомих називають зворотним ходом метода Гаусса.

Враховуючи, що визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів, під час виконання прямого ходу методу Гаусса, шляхом множення ведучих елементів обчислюється визначник матриці:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,n}^{(n-1)}.$$

Метод LU-факторизації

Інколи цей метод називають LU-розкладанням або LU-декомпозицією.

Нехай $\mathbf{A} = \left\{a_{i\,j}\right\}_{i,j=1}^{n}$ – дана $n \times n$-матриця, а $\mathbf{L} = \left\{l_{i\,j}\right\}_{i,j=1}^{n}$ та $\mathbf{U} = \left\{u_{i\,j}\right\}_{i,j=1}^{n}$ – відповідно нижня (ліва) та верхня (права) трикутні матриці.

Зафіксуємо діагональ верхньої трикутної матриці U. Будемо знаходити $l_{i\,j}$ (при $i \ge j$) та $u_{i\,j}$ (при $i < j$), такі, щоб виконувалась рівність:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Виконав множення матриць, на основі поелементного прирівнювання лівих та правих частин приходимо до $n \times n$-матриці рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{\min\{i,k\}} l_{i\,j} u_{j\,k} = a_{i\,k}\,. \tag{2.7}$$

Звідки можна легко знайти елементи матриці $\mathbf{L}$ та $\mathbf{U}$.

Оскільки матриця коефіцієнтів вихідної системи (2.1) розкладена у добуток трикутних матриць $\mathbf{L}$ та $\mathbf{U}$, то замість (2.2) можна записати еквівалентне (2.1) матрично-векторне рівняння

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b}\,. \tag{2.8}$$

Введемо вектор допоміжних змінних $\mathbf{y} = \left(y_1; y_2; \dots; y_n\right)^T$, тоді рівняння (2.8) можна переписати у вигляді системи матрично-векторних рівнянь

$$\begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Таким чином, для розв'язання системи (2.1) необхідно послідовно розв'язати дві системи СЛАР з трикутними матрицями коефіцієнтів.

Обчислення визначника *LU*-факторизованої матриці **A** зводиться до множення *n* чисел:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{L} \cdot \det \mathbf{U} = l_{11} \cdot l_{22} \cdot \ldots \cdot l_{nn}.$$

Для знаходження оберненої матриці $\mathbf{A}^{-1}$ запишемо наступні рівняння:

$$x_{ij} + \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_{kj} = 0, \text{ якщо } i < j, \qquad (2.10)$$

$$\sum_{k=j}^{n} x_{ik} l_{kj} = \delta_{ij}, \text{ якщо } i \geq j, \qquad (2.11)$$

де $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{якщо } i = j, \\ 0, \textit{якщо } i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера.

З рівнянь (2.10) та (2.11) можна легко виразити всі елементи x_{ij} шуканої оберненої матриці A^{-1}.

Метод відбиття

Розглянемо дві ситуації:

1. Припустимо, що вже відомо ортогональне розкладення матриці $\mathbf{A}$:

   $$\mathbf{A} = \mathbf{QR}, \qquad (2.12)$$

   де $\mathbf{Q} = \left\{ q_{ij} \right\}_{i,j=1}^{n}$ – ортогональна, а $\mathbf{R} = \left\{ r_{ij} \right\}_{i,j=1}^{n}$ – права трикутна матриці.

   Після підстановки розкладення (2.12) в (2.2) маємо еквівалентну систему

   $$\mathbf{QRx} = \mathbf{b}, \qquad (2.13)$$

враховуючи ортогональність симетричної матриці $\mathbf{Q}$, можемо сказати, що система (2.13) рівнозначна системі

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}. \tag{2.14}$$

Позначивши $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, систему (2.14) можна переписати таким чином

$$\begin{cases} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \ldots + r_{1n}x_n = y_1, \\ \qquad r_{21}x_2 + \ldots + r_{2n}x_n = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad r_{nn}x_n = y_n. \end{cases} \tag{2.15}$$

З системи (2.15) випливає, що для отримання шуканого розв'язку $\mathbf{x}$ достатньо виконати зворотний хід метода Гаусса. Якщо діагональ матриці $\mathbf{R}$ не містить нулів, то невідомі системи (2.15) та вихідної системи (2.2) можна послідовно знайти за формулами

$$x_n = \frac{y_n}{r_{nn}},\ x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} r_{ik}x_k}{r_{ii}}, \tag{2.16}$$

де $i = n-1,\ldots,2,1$.

2. Припустимо, що готового *QR*-розкладення матриці $\mathbf{A}$ немає і в явному вигляді воно не вимагається, але потрібно отримати розв'язок системи (2.2), використовуючи перетворення відбиття.

   Проміжною метою цієї задачі залишається приведення СЛАР до вигляду (2.15). Це означає, що необхідно розширену матрицю $\mathbf{B} = (\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$ системи (2.2) ортогональними перетвореннями потрібно перевести в розширену матрицю $\mathbf{C} = (\mathbf{R}\,|\,\mathbf{y})$ системи (2.14). Зрозуміло, що це можливо зробити, застосовуючи послідовно до стовпців матриці $\mathbf{B}$ перетворення Хаусхолдера за схемою *QR*-факторизації.

Оскільки

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}_{n-1} \ldots \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{A}, \qquad \mathbf{Q}^T = \mathbf{H}_{n-1} \ldots \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1,$$

то $\mathbf{Q}^T \mathbf{B} = \mathbf{C}$ і

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}_{n-1}\left(\ldots\left(\mathbf{H}_2\left(\mathbf{H}_1 \mathbf{B}\right)\right)\ldots\right),$$

де $\mathbf{H}_i \ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ – матриця Хаусхолдера *i*-го етапу.

Якщо розв'язок лінійної системи $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ з дійсною квадратною матрицею $\mathbf{A}$ існує та єдиний, то він може бути знайдений методом відбиття. Справедливість цього факту випливає безпосередньо з факту розкладання довільної квадратної матриці шляхом перетворень відбиття в добуток ортогональної $\mathbf{Q}$ та трикутної $\mathbf{R}$ матриць, однозначності арифметичних операцій, скінченна кількість яких, як встановлено, приводить до розв'язку.

Метод квадратних коренів

Вивчення багатьох задач призводить до необхідності розв'язання СЛАР з симетричною додатно-визначеною матрицею. Такі системи виникають, наприклад, при розв'язанні диференціальних рівнянь методом скінченних елементів або ж скінченно-різницевими методами та при чисельному розв'язанні інтегральних рівнянь Фредгольма з симетричним ядром, оскільки ця задача зводиться до лінійної системи з симетричною матрицею.

Для розв'язання таких систем, а також систем рівнянь більш загального виду з ермітовою, не обов'язково додатно-визначеною, матрицею застосовується *метод квадратних коренів* (*метод Холецького*).

Симетричну матрицю **A** розкладають у добуток $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$, де

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{21} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Запишемо рівність $\mathbf{A}=\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ в наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Виконав множення матриць отримуємо матрицю рівнянь, очевидно що вона також є симетричною тому запишемо тільки верхній трикутник даної матриці рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{i} u_{kj}u_{ki}=a_{ij} \text{ при } i\le j. \tag{2.17}$$

Таким чином, матриця **U** може бути визначена за формулами:

$$u_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}u_{ki}^2}, \tag{2.18}$$

$$u_{ij}=u_{ii}^{-1}\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}u_{ki}u_{kj}\right), \tag{2.19}$$

при $i=1,2,\dots,n$; $j=i+1,\dots,n$; якщо $j<i$, то $u_{ij}=0$.

При наявності U^TU-розкладання розв’язання симетричної системи $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ зводиться до послідовного розв’язання двох трикутних систем

$$\mathbf{U^Ty}=\mathbf{b} \quad \text{та} \quad \mathbf{Ux}=\mathbf{y}.$$

Метод прогонки

При розв'язанні практичних задач часто виникає необхідність розв'язання систем рівнянь з матрицями, які містять велику кількість нульових елементів. Зазвичай ці матриці мають так звану *стрічкову структуру*. У матриць стрічкової структури ненульові елементи знаходяться на головній діагоналі та на декількох суміжних до неї побічних діагоналях.

Розглянемо найбільш простий випадок *стрічкових систем*, до яких зводиться розв'язання задач сплайн-інтерполяції функцій, дискретизації крайових задач для диференціальних рівнянь методами скінченних різниць, скінченних елементів та іншими. А саме будемо шукати розв'язок такої системи, кожне рівняння якої пов'язує три "сусідні" невідомі:

$$b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i, \tag{2.20}$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$; $b_1 = 0$, $d_n = 0$. Такі рівняння називають *триточковими різницевими рівняннями другого порядку*. Система (2.20) має тридіагональну структуру.

Ставлячи за мету позбавитись від ненульових елементів в піддіагональній частині матриці системи, припустимо, що існують такі набори чисел δ_i та λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, при яких має місце рівність

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i, \tag{2.21}$$

тобто триточкове рівняння другого порядку (2.20) перетворюється в двоточкове рівняння першого порядку (2.21). Після не складних перетворень у рівності (2.21) та (2.20) отримуємо:

$$x_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i \delta_{i-1}} x_{i+1} + \frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \delta_{i-1}}. \tag{2.22}$$

Рівність (2.22) має таку ж структуру як і рівність (2.21) інакше кажучи подання (2.21) буде існувати, якщо при всіх $i = 1, 2, \ldots, n$ виконуються рекурентні співвідношення

$$\delta_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i \delta_{i-1}}, \ \lambda_i = -\frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \delta_{i-1}}. \qquad (2.23)$$

Таким чином, розв'язання рівнянь виду (2.21) даним способом, який називається *методом прогонки*, зводиться до обчислень за трьома простими формулами: знаходження *прогоночних коефіцієнтів* δ_i, λ_i за формулами (2.23) при $i = 1, 2, \ldots, n$ (*пряма прогонка*) та потім отримання невідомих x_i за формулою (2.21) при $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ (*зворотна прогонка*). Метод прогонки вимагає для своєї реалізації кількість операцій, яка пропорційна n.

Для успішного застосування методу прогонки необхідно, щоб в процесі обчислення не виникало ситуацій з діленням на нуль, а при великих розмірностях систем не було швидкого зростання похибок округлення.

Прогонка є *коректною*, якщо знаменник прогоночних коефіцієнтів (2.23) не набуває нульового значення, та *стійкою*, якщо $|\delta_i| < 1$ при всіх $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Метод обертань

Нехай c_1 та s_1 – деякі відмінні від нуля числа. Помножимо перше рівняння системи (2.1) на c_1, друге – на s_1 та додамо їх; отриманим рівнянням замінимо перше рівняння системи. Потім перше рівняння вихідної системи множимо на $-s_1$, друге – на c_1 та результатом їх додавання замінюємо друге рівняння. Таким чином, перші два рівняння системи (2.1) замінюються рівняннями:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(c_1 a_{1j} + s_1 a_{2j}\right)x_j = c_1 b_1 + s_1 b_2 ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(-s_1 a_{1j} + c_1 a_{2j}\right)x_j = -s_1 b_1 + c_1 b_2 .$$

В результаті отримуємо систему:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^{(1)} x_j = b_1^{(1)}, \\ \sum_{j=2}^{n} a_{2j}^{(1)} x_j = b_2^{(1)}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{3j} x_j = b_3 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j = b_n , \end{cases} \tag{2.24}$$

де $a_{1j}^{(1)} = c_1 a_{1j} + s_1 a_{2j}$ при $j = 1,2,\dots,n$; $b_1^{(1)} = c_1 b_1 + s_1 b_2$;

$a_{2j}^{(1)} = c_1 a_{2j} - s_1 a_{1j}$ при $j = 2,3,\dots,n$; $b_2^{(1)} = c_1 b_2 - s_1 b_1$.

На введені два параметри c_1 та s_1 накладемо дві умови:

- $c_1 a_{21} - s_1 a_{11} = 0$ – умова виключення x_1 з другого рівняння;
- $c_1^2 + s_1^2 = 1$ – умова нормування.

Легко перевірити, що цим умова будуть відповідати наступні значення c_1 та s_1:

$$c_1 = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \; s_1 = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}. \tag{2.25}$$

Числа c_1 та s_1 можна інтерпретувати як косинус та синус деякого кута α_1. Тобто один проміжний крок прямого ходу такого методу може розглядатися як перетворення обертання на кут α_1 розширеної матриці системи в площині, яка визначається індексами елемента, який виключається.

Після отримання системи (2.24) перше рівняння замінюється новим, отриманим додаванням результатів множення першого та третього рівняння (2.24) відповідно на

$$c_2 = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{\left(a_{11}^{(1)}\right)^2 + a_{31}^2}} \quad \text{та} \quad s_2 = \frac{a_{31}}{\sqrt{\left(a_{11}^{(1)}\right)^2 + a_{31}^2}} ,$$

а третє – рівнянням, отриманим додаванням результатів множення тих самих рівнянь відповідно на $-s_2$ та c_2. В результаті отримуємо систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}^{(2)} x_j = b_1^{(2)}, \\ \sum\limits_{j=2}^{n} a_{2j}^{(1)} x_j = b_2^{(1)}, \\ \sum\limits_{j=2}^{n} a_{3j}^{(1)} x_j = b_3^{(1)}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{4j} x_j = b_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} x_j = b_n, \end{cases}$$

де $a_{1j}^{(2)} = c_2 a_{1j}^{(1)} + s_2 a_{3j}$ при $j = 1, 2, \ldots, n$; $b_1^{(2)} = c_2 b_1^{(1)} + s_2 b_3$;

$a_{3j}^{(1)} = c_2 a_{3j} - s_2 a_{1j}^{(1)}$ при $j = 2, 3, \ldots, n$; $b_3^{(1)} = c_2 b_3 - s_2 b_1^{(1)}$.

Виконав такі перетворення $n-1$ раз, прийдемо до системи

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}^{(n-1)} x_j = b_1^{(n-1)}, \\ \quad \sum\limits_{j=2}^{n} a_{2j}^{(1)} x_j = b_2^{(1)}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \sum\limits_{j=2}^{n} a_{nj}^{(1)} x_j = b_n^{(1)} \end{cases} \tag{2.26}$$

такого ж виду як прийняла система (2.1) після першого етапу перетворень прямого ходу метода Гаусса.

Далі, на другому етапі, за $n-2$ проміжних кроків створюємо нулі під елементом $a_{22}^{(1)}$ і т.д.

В результаті $n-1$ таких етапів прямого ходу вихідна система (2.1) буде приведена до трикутного вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}^{(n-1)} x_1 + a_{12}^{(n-1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)} x_n = b_1^{(n-1)}, \\ \qquad\qquad a_{22}^{(n-1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(n-1)} x_n = b_2^{(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)} x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases} \tag{2.27}$$

З системи (2.27) можна легко знайти невідомі $x_n, x_{n-1}, \ldots x_1$ за формулою (2.6).

Завдання на лабораторну роботу

Розробити програму на мові програмування *C#* у середовищі розробки Visual Studio 2013 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та дозволяти:

1. Розв'язати, першу задану за варіантом, систему лінійних алгебраїчних рівнянь двома заданими прямими методами (перші дві цифри у стовпчику методи), де

0	Класичний метод Гаусса
1	Метод Гаусса з вибором головного елемента по стовпцях
2	Метод *LU*-факторизації з наявною одиничною діагоналлю у матриці *L*
3	Метод *LU*-факторизації з наявною одиничною діагоналлю у матриці *U*
4	Метод відбиття на основі *QR*-факторизації
5	Метод відбиття на основі *LQ*-факторизації
6	*TR*-метод обертань
7	*LT*-метод обертань

   та знайти матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ і визначник матриці $\mathbf{A}$, тобто $\det \mathbf{A}$ за допомогою формул, які випливають з відповідного метода.

2. Розв'язати, другу задану за варіантом, симетричну систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом квадратних коренів (методом Холецького) і ще будь-яким одним прямим методом та знайти $\mathbf{A}^{-1}$ і $\det \mathbf{A}$ за допомогою формул, які випливають з метода квадратних коренів.

3. Розв'язати, третю задану за варіантом, стрічкову систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом прогонки і ще будь-яким одним

прямим методом та знайти $\det \mathbf{A}$ за допомогою формули, яка випливає з метода прогонки.

4. Пункти 1-3 виконати двома способами: у Visual Studio 2005 (або вище) у віконному режимі на мові програмування C# та в одному з математичних пакетів (MatLab 7.0 / MathCAD 15.0 / Mathematica 7.0 / Maple 14.0 (або вище). Реалізуючи поставлені задачі на *C# не дозволяється використовувати спеціальні функції для обробки матриць та векторів*, тобто необхідно реалізувати розв'язання СЛАР шляхом покоординатних обчислень. Реалізуючи поставлені задачі *у MatLab/MathCAD/Mathematica/ Maple дозволяється використовувати будь-які векторно-матричні оператори*, але таким чином, щоб завдання було виконане запропонованим за варіантом методом.
5. При виконанні завдань сформульованих в п.4 провести заміри часу роботи алгоритмів для кожного середовища розробки та звести отримані результати до таблиць. Обгрунтувати отримані результати та зробити висновки.
6. При вирішені задач поставлених в п.4 необхідно виводити на екран всі проміжні обчислення. Наприклад, для класичного методу Гаусса необхідно виводити на екран СЛАР кожного разу після виключення чергової змінної зі всіх рівнянь за індексом більших ніж поточне, тобто для СЛАР з дев'ятьма невідомими необхідно вивести 9 проміжних матриць. Аналогічним чином необхідно робити і для інших методів.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт має включати:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підгрунття для виконання першої частини розрахунково-графічної роботи: Цей розділ має містити використані математичні формули при виконанні РГР та процес виведення необхідних формул для знаходження оберненої матриці та визначника методом заданим за варіантом.
3. Значення коренів, заданих за варіантом, систем лінійних алгебраїчних рівнянь отриманих кожним з методів:

СЛАР № ___

Метод	C#	MatLab/MathCAD/Mathematica/Maple

4. Час роботи алгоритмів, що реалізують методи знаходження розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

СЛАР № ___

Метод	C#	MatLab/MathCAD/Mathematica/Maple

5. Висновки. У висновках має бути наведено ґрунтовний аналіз отриманих результатів за декількома критеріями, порівняння очікуваних теоретично результатів з отриманими практично

результатами, пояснено з теоретичної точки зору отримані часові показники роботи алгоритмів, що реалізують прямі методи розв’язання СЛАР.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	**Варіант №**
1	3
2	8
3	25
4	26
5	1
6	27
7	14
8	7
9	29
10	28
11	12
12	18
13	11
14	30
15	17

№ за списком викладача	**Варіант №**
16	22
17	21
18	4
19	9
20	15
21	23
22	2
23	20
24	5
25	13
26	24
27	6
28	19
29	10
30	16

Варіант №1

<table>
<tr><th>№</th><th colspan="2">СЛАР</th><th>Методи</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>$\mathbf{A} = \begin{matrix} 62 & 29 & -94 & -38 & 67 & -26 & -68 & 16 & -10 \\ -83 & -57 & -48 & 7 & -55 & 60 & -19 & 73 & -87 \\ -98 & 42 & 19 & -93 & 60 & 94 & -91 & -8 & -71 \\ 61 & -56 & -56 & 49 & 74 & 17 & -52 & 7 & 6 \\ 56 & -53 & -66 & -95 & -46 & -28 & -57 & -34 & -24 \\ -93 & -12 & 6 & 9 & -49 & -99 & 96 & -47 & -51 \\ -99 & -98 & -16 & 86 & -25 & 45 & -71 & 23 & -18 \\ 63 & 56 & -95 & 53 & 33 & 73 & -70 & -86 & -30 \\ 7 & -1 & -24 & -32 & -78 & -98 & -88 & 21 & -70 \end{matrix}$</td><td>$\mathbf{b} = \begin{matrix} -25 \\ -32 \\ -83 \\ -28 \\ -36 \\ 3 \\ -49 \\ 11 \\ 90 \end{matrix}$</td><td rowspan="3">0, 3
2, 0</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\mathbf{A} = \begin{matrix} 208 & 90 & -46 & 5 & -79 & -116 & -41 & 45 & -67 & 94 \\ 90 & 185 & -40 & 120 & -1 & 27 & 18 & 48 & -31 & 38 \\ -46 & -40 & 235 & 15 & 22 & -47 & -92 & -46 & -2 & -149 \\ 5 & 120 & 15 & 190 & 13 & 111 & 39 & 21 & -32 & -37 \\ -79 & -1 & 22 & 13 & 176 & 62 & 24 & -36 & 128 & 43 \\ -116 & 27 & -47 & 111 & 62 & 186 & 94 & 4 & 21 & -16 \\ -41 & 18 & -92 & 39 & 24 & 94 & 194 & 154 & 123 & 110 \\ 45 & 48 & -46 & 21 & -36 & 4 & 154 & 249 & 130 & 127 \\ -67 & -31 & -2 & -32 & 128 & 21 & 123 & 130 & 233 & 117 \\ 94 & 38 & -149 & -37 & 43 & -16 & 110 & 127 & 117 & 246 \end{matrix}$</td><td>$\mathbf{b} = \begin{matrix} -234 \\ 55 \\ 140 \\ -163 \\ -88 \\ -40 \\ -197 \\ -99 \\ 30 \\ 250 \end{matrix}$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$\mathbf{A} = \begin{matrix} 782 & -259 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -120 & 398 & -186 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 488 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 89 & 810 & 95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 220 & 719 & 55 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -165 & -634 & 245 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -943 & -313 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 204 & 958 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25 & -58 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -785 & -916 \end{matrix}$</td><td>$\mathbf{b} = \begin{matrix} 43 \\ -807 \\ 637 \\ 635 \\ 445 \\ -701 \\ 319 \\ 37 \\ 946 \\ 298 \end{matrix}$</td></tr>
</table>

Варіант №2

№	СЛАР		Методи
1.	$A = \begin{matrix} -100 & 9 & -94 & -11 & -62 & -97 & -100 & -94 & 11 \\ -65 & 100 & 96 & -38 & 15 & 99 & -87 & -86 & 89 \\ 10 & -85 & 18 & 44 & 77 & -19 & -84 & -16 & -32 \\ -18 & -31 & -85 & 61 & -27 & -85 & -68 & 35 & 50 \\ -14 & 24 & 72 & -7 & 73 & -84 & 82 & -43 & 83 \\ 56 & -37 & -73 & -39 & -18 & 86 & 6 & -8 & 62 \\ -95 & -58 & 100 & 50 & -65 & 42 & -78 & -70 & 57 \\ 8 & 8 & -40 & -15 & 42 & 83 & 89 & 99 & 1 \\ 88 & 78 & 86 & 90 & 58 & -33 & 77 & 25 & -2 \end{matrix}$	$b = \begin{matrix} -81 \\ -57 \\ -21 \\ -64 \\ 63 \\ -38 \\ -12 \\ -5 \\ 12 \end{matrix}$	1, 2 0, 3
2.	$A = \begin{matrix} 221 & -128 & -118 & 26 & 134 & -28 & -196 & 77 & -8 & 3 \\ -128 & 195 & -4 & 23 & -42 & 3 & 123 & -114 & -16 & -88 \\ -118 & -4 & 209 & -29 & -121 & 67 & 69 & -65 & 5 & 42 \\ 26 & 23 & -29 & 44 & 20 & -33 & -36 & -21 & 20 & -17 \\ 134 & -42 & -121 & 20 & 249 & -162 & -91 & 10 & 35 & -124 \\ -28 & 3 & 67 & -33 & -162 & 240 & -40 & -22 & -116 & 77 \\ -196 & 123 & 69 & -36 & -91 & -40 & 235 & -28 & 21 & -15 \\ 77 & -114 & -65 & -21 & 10 & -22 & -28 & 189 & 29 & 102 \\ -8 & -16 & 5 & 20 & 35 & -116 & 21 & 29 & 243 & -22 \\ 3 & -88 & 42 & -17 & -124 & 77 & -15 & 102 & -22 & 197 \end{matrix}$	$b = \begin{matrix} 55 \\ 238 \\ 90 \\ -17 \\ -49 \\ -94 \\ 81 \\ -248 \\ 28 \\ -116 \end{matrix}$	
3.	$A = \begin{matrix} 333 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 66 & 396 & -127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 371 & -744 & -244 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 57 & -935 & 357 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -105 & 339 & -44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 38 & -79 & -27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 103 & 711 & -88 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -44 & -618 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 68 & -759 & -208 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38 & -231 \end{matrix}$	$b = \begin{matrix} -497 \\ -419 \\ 234 \\ -470 \\ 649 \\ 966 \\ 461 \\ -312 \\ 168 \\ -785 \end{matrix}$	

Варіант №3

№	СЛАР													Методи
1.	**A** =	-43	-62	55	-87	5	-91	-29	70	-27		**b** =	-57	2, 4 0, 1
		42	-19	-25	78	-30	26	52	24	-78			41	
		-18	68	89	99	80	-96	61	37	16			86	
		-57	-92	99	-37	12	-81	48	-78	-39			51	
		96	-44	51	27	77	11	-7	12	27			-66	
		-11	6	-56	48	80	24	36	68	-29			-71	
		94	-100	-10	-78	-81	12	-19	18	-6			-71	
		53	35	-74	93	0	59	-99	-68	80			0	
		-25	-6	-41	82	66	-88	-34	16	-99			78	
2.	**A** =	191	26	96	65	-85	-153	-57	21	115	38	**b** =	-131	
		26	219	127	-125	-111	0	-22	-109	47	86		77	
		96	127	243	41	-90	-48	-110	-76	95	58		-136	
		65	-125	41	248	116	-6	8	115	29	9		22	
		-85	-111	-90	116	211	45	82	69	-41	14		-64	
		-153	0	-48	-6	45	212	43	40	-84	-20		226	
		-57	-22	-110	8	82	43	224	62	-167	38		-182	
		21	-109	-76	115	69	40	62	235	-21	56		161	
		115	47	95	29	-41	-84	-167	-21	244	-18		181	
		38	86	58	9	14	-20	38	56	-18	231		-67	
3.	**A** =	601	-55	0	0	0	0	0	0	0	0	**b** =	-895	
		44	-135	-56	0	0	0	0	0	0	0		476	
		0	-239	-734	-80	0	0	0	0	0	0		-462	
		0	0	201	663	-291	0	0	0	0	0		-154	
		0	0	0	5	-202	-17	0	0	0	0		96	
		0	0	0	0	40	314	-65	0	0	0		886	
		0	0	0	0	0	-66	-137	66	0	0		-165	
		0	0	0	0	0	0	-262	-666	-85	0		967	
		0	0	0	0	0	0	0	-6	-604	-97		-397	
		0	0	0	0	0	0	0	0	760	904		402	

Варіант №4

№	СЛАР													Методи
		-75	41	-100	69	36	47	1	-97	-50			-75	
		-43	-72	86	-85	58	-73	31	27	39			-17	
		21	67	-42	38	-75	-63	-30	32	93			-62	
		85	34	-37	-59	93	-87	46	-42	-61			35	
1.	**A** =	-45	-90	-15	-51	31	57	78	21	-28		**b** =	25	
		-67	-6	-70	-30	66	-74	-60	78	-56			-22	
		-25	-71	-89	70	19	29	25	-60	-54			-21	
		-29	-41	-4	93	-7	54	47	1	-22			79	
		11	-71	-21	-4	17	57	-99	4	76			14	
		162	55	-23	-52	-82	1	-6	-45	38	15		198	
		55	153	1	-104	-55	-111	-67	72	15	58		-195	
		-23	1	117	59	-31	-89	70	-9	-41	1		91	
		-52	-104	59	178	59	54	120	13	48	24		22	
		-82	-55	-31	59	222	98	33	-43	37	-34		-180	
2.	**A** =	1	-111	-89	54	98	203	36	-52	34	-23	**b** =	-1	1, 3 2, 1
		-6	-67	70	120	33	36	222	-21	25	119		-1	
		-45	72	-9	13	-43	-52	-21	220	27	120		-85	
		38	15	-41	48	37	34	25	27	173	103		-198	
		15	58	1	24	-34	-23	119	120	103	235		-184	
		813	617	0	0	0	0	0	0	0	0		-789	
		-152	636	60	0	0	0	0	0	0	0		222	
		0	-71	-955	-179	0	0	0	0	0	0		558	
		0	0	-217	-677	-52	0	0	0	0	0		-153	
3.	**A** =	0	0	0	80	-812	-24	0	0	0	0	**b** =	-819	
		0	0	0	0	78	392	54	0	0	0		-467	
		0	0	0	0	0	-402	-933	-168	0	0		-693	
		0	0	0	0	0	0	9	62	-6	0		-438	
		0	0	0	0	0	0	0	140	640	299		-120	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-22	63		54	

Варіант №5

№	СЛАР		Методи
1.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} -7 & -1 & 22 & 76 & -71 & 8 & -45 & 55 & 38 \\ 73 & -67 & -35 & -100 & -47 & 77 & -25 & 70 & 17 \\ 56 & 65 & 11 & -84 & -72 & -25 & 22 & 1 & -73 \\ 19 & -55 & -42 & 6 & -34 & -53 & -41 & -17 & -38 \\ 28 & -59 & 54 & 93 & 17 & -28 & 62 & 7 & -75 \\ 26 & 93 & -47 & 77 & -33 & 67 & -33 & 19 & -1 \\ 22 & 48 & -75 & -20 & 91 & -45 & 67 & 20 & 13 \\ -74 & 41 & 48 & 42 & 36 & -1 & -63 & 34 & -5 \\ -90 & -91 & -70 & 57 & -45 & 2 & -31 & 91 & 6 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} 47 \\ 78 \\ -52 \\ 14 \\ 32 \\ 51 \\ 3 \\ 45 \\ 14 \end{matrix}$	3, 5 1, 0
2.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} 75 & -66 & -9 & 41 & 45 & -33 & 59 & 48 & 33 & 86 \\ -66 & 180 & -26 & 25 & -6 & 121 & -104 & -127 & -103 & -25 \\ -9 & -26 & 187 & -154 & 6 & 103 & 51 & 33 & 67 & 25 \\ 41 & 25 & -154 & 189 & 7 & -42 & -19 & -47 & -37 & 12 \\ 45 & -6 & 6 & 7 & 135 & -47 & 63 & -10 & 12 & 115 \\ -33 & 121 & 103 & -42 & -47 & 248 & -9 & -89 & -13 & 22 \\ 59 & -104 & 51 & -19 & 63 & -9 & 195 & 36 & 92 & 118 \\ 48 & -127 & 33 & -47 & -10 & -89 & 36 & 213 & 45 & 10 \\ 33 & -103 & 67 & -37 & 12 & -13 & 92 & 45 & 166 & -2 \\ 86 & -25 & 25 & 12 & 115 & 22 & 118 & 10 & -2 & 221 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} -8 \\ 193 \\ 35 \\ 91 \\ 39 \\ 55 \\ -244 \\ -165 \\ 127 \\ 132 \end{matrix}$	
3.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} -85 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 36 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -237 & 916 & 161 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 72 & -422 & 82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -212 & -864 & -238 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 115 & 336 & -52 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 98 & 561 & -277 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23 & 204 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -37 & -998 & -75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42 & -78 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} -355 \\ 570 \\ -57 \\ -929 \\ -649 \\ 444 \\ -53 \\ -695 \\ -318 \\ 215 \end{matrix}$	

Варіант №6

№	СЛАР				Методи
1.	**A** =	$\begin{matrix} 67 & 54 & 17 & 66 & 24 & 56 & -100 & -20 & -78 \\ 55 & 41 & -59 & -17 & 32 & -13 & 2 & -27 & 40 \\ 12 & -44 & -35 & -51 & 6 & 37 & -77 & 46 & 83 \\ 82 & -57 & 40 & -52 & 96 & 46 & 45 & -97 & -48 \\ -96 & -30 & 0 & 51 & 56 & -42 & 34 & 17 & 23 \\ -74 & -37 & 40 & 70 & -78 & -100 & -79 & -14 & 88 \\ 89 & -46 & 73 & 26 & -58 & -88 & -92 & 98 & -14 \\ -29 & 93 & 14 & 90 & -14 & 72 & 13 & -15 & 53 \\ -56 & -90 & -65 & 79 & -33 & 16 & 95 & -35 & -81 \end{matrix}$	**b** =	$\begin{matrix} 37 \\ -1 \\ -12 \\ -5 \\ -67 \\ 3 \\ -46 \\ 39 \\ 35 \end{matrix}$	
2.	**A** =	$\begin{matrix} 366 & 272 & 93 & -136 & 210 & 4 & -7 & 110 & 236 & -57 \\ 272 & 386 & 167 & -140 & -45 & -104 & -73 & 25 & 60 & -76 \\ 93 & 167 & 366 & -137 & -107 & -88 & -41 & -13 & -57 & 118 \\ -136 & -140 & -137 & 350 & -141 & -45 & -74 & 13 & 42 & -87 \\ 210 & -45 & -107 & -141 & 422 & 163 & 116 & 104 & 227 & 13 \\ 4 & -104 & -88 & -45 & 163 & 252 & 91 & 110 & 68 & 114 \\ -7 & -73 & -41 & -74 & 116 & 91 & 68 & 51 & 36 & 48 \\ 110 & 25 & -13 & 13 & 104 & 110 & 51 & 301 & 270 & 33 \\ 236 & 60 & -57 & 42 & 227 & 68 & 36 & 270 & 456 & -27 \\ -57 & -76 & 118 & -87 & 13 & 114 & 48 & 33 & -27 & 217 \end{matrix}$	**b** =	$\begin{matrix} 128 \\ -74 \\ 372 \\ 190 \\ 435 \\ -51 \\ 430 \\ -144 \\ 319 \\ 417 \end{matrix}$	3, 4 2, 3
3.	**A** =	$\begin{matrix} -234 & 55 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 151 & -34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -503 & -137 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 296 & 609 & -286 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -29 & 71 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -424 & 979 & 430 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 177 & -964 & 273 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 68 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -91 & 252 & -71 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -582 & -636 \end{matrix}$	**b** =	$\begin{matrix} -787 \\ 233 \\ 880 \\ -291 \\ -179 \\ 969 \\ 892 \\ 353 \\ 977 \\ 534 \end{matrix}$	

Варіант №7

№	СЛАР		Методи
1.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} 61 & -82 & 35 & -48 & -40 & -43 & -50 & -1 & -92 \\ -39 & -99 & -75 & -75 & 26 & -1 & 42 & 21 & 10 \\ 85 & -88 & 76 & 48 & -8 & 90 & 94 & -86 & -24 \\ 28 & 8 & -31 & -29 & 94 & 98 & -95 & 96 & 50 \\ 86 & -37 & 12 & 14 & -99 & -26 & 33 & 17 & 88 \\ 24 & -30 & -51 & -57 & 14 & -53 & 58 & 21 & -92 \\ 7 & -9 & -43 & 69 & -82 & 56 & -30 & 100 & -44 \\ 24 & 37 & 98 & -77 & -55 & 16 & 41 & 12 & 46 \\ 81 & 79 & 8 & -70 & 65 & -76 & -39 & -82 & -54 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} 67 \\ 94 \\ -83 \\ 76 \\ -93 \\ -79 \\ -18 \\ 94 \\ -77 \end{matrix}$	
2.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} 268 & 74 & -71 & 11 & -104 & 16 & -33 & 64 & 7 & 11 \\ 74 & 375 & -118 & 230 & -51 & -212 & 180 & 204 & 163 & -35 \\ -71 & -118 & 400 & -122 & -81 & 72 & -201 & 110 & 20 & 333 \\ 11 & 230 & -122 & 239 & -47 & -40 & 189 & 188 & 57 & -69 \\ -104 & -51 & -81 & -47 & 325 & -53 & -13 & -222 & -27 & -118 \\ 16 & -212 & 72 & -40 & -53 & 335 & -64 & -60 & -110 & 73 \\ -33 & 180 & -201 & 189 & -13 & -64 & 325 & 47 & -8 & -84 \\ 64 & 204 & 110 & 188 & -222 & -60 & 47 & 446 & 123 & 123 \\ 7 & 163 & 20 & 57 & -27 & -110 & -8 & 123 & 379 & 65 \\ 11 & -35 & 333 & -69 & -118 & 73 & -84 & 123 & 65 & 378 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} 420 \\ 19 \\ 384 \\ 83 \\ 108 \\ 264 \\ 80 \\ 14 \\ -215 \\ 394 \end{matrix}$	2, 6 1, 0
3.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} -327 & 106 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -104 & -512 & 92 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 56 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 501 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 167 & -70 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 218 & 439 & -64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -145 & 943 & 365 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -91 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -143 & -749 & 169 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 219 & 566 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} -981 \\ 687 \\ 845 \\ 542 \\ -915 \\ -244 \\ 409 \\ 459 \\ -552 \\ -462 \end{matrix}$	

Варіант №8

№	СЛАР													Методи
		-54	-11	40	57	80	-99	29	45	22			50	
		19	40	89	-36	-63	22	57	-62	-14			39	
		-81	40	69	-87	-89	-63	76	31	43			-27	
		18	42	-69	-88	-37	31	91	91	-37			14	
1.	**A** =	9	-71	78	98	-83	98	45	27	-10		**b** =	20	
		38	-57	65	-97	49	39	-3	18	43			98	
		-62	0	72	-22	-43	58	87	26	64			72	
		60	61	68	-14	-28	60	-8	36	40			-34	
		73	17	62	15	-46	-22	71	-50	72			38	
		414	250	-51	-38	-129	-77	208	-8	239	259		240	
		250	655	293	108	-42	255	-91	-26	47	200		353	
		-51	293	643	184	-228	94	-22	-117	-141	-235		284	
		-38	108	184	265	-32	-96	-210	126	12	-167		346	
		-129	-42	-228	-32	282	127	-169	40	7	44		-219	
2.	**A** =	-77	255	94	-96	127	466	-162	-98	-248	169	**b** =	219	0, 7 3, 1
		208	-91	-22	-210	-169	-162	678	-10	260	-116		451	
		-8	-26	-117	126	40	-98	-10	655	22	-166		205	
		239	47	-141	12	7	-248	260	22	480	-28		528	
		259	200	-235	-167	44	169	-116	-166	-28	583		361	
		346	-16	0	0	0	0	0	0	0	0		3	
		-65	248	-80	0	0	0	0	0	0	0		-137	
		0	176	660	286	0	0	0	0	0	0		996	
		0	0	-249	-785	-315	0	0	0	0	0		624	
		0	0	0	-6	-20	8	0	0	0	0		-29	
3.	**A** =	0	0	0	0	-365	-802	46	0	0	0	**b** =	789	
		0	0	0	0	0	-102	545	-175	0	0		-725	
		0	0	0	0	0	0	-93	-322	3	0		-220	
		0	0	0	0	0	0	0	105	813	-324		855	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-194	-218		835	

Варіант №9

№	СЛАР													Методи
		23	22	-37	-64	20	-81	28	-57	-87			30	
		-23	-97	-73	-10	-5	-57	27	92	-87			25	
		-43	91	-4	88	-76	91	77	-53	-9			-28	
		6	-70	6	63	-73	48	99	-6	83			15	
1.	**A** =	-65	0	89	-52	-76	-80	-29	-8	-45		**b** =	21	
		-11	-70	60	55	-19	57	6	54	-21			-30	
		95	41	-82	-37	64	82	-83	-72	50			-93	
		12	59	-88	-76	43	28	23	-80	34			71	
		46	-42	-86	26	93	86	-40	-30	29			82	
		209	112	-27	-107	-8	-15	74	73	-61	16		-57	
		112	225	12	-177	40	68	58	10	-17	-57		-231	
		-27	12	177	-71	15	28	-45	19	-42	-37		46	
		-107	-177	-71	214	43	6	-31	10	87	80		25	
		-8	40	15	43	233	43	80	155	25	12		220	
2.	**A** =	-15	68	28	6	43	162	-58	-27	106	27	**b** =	193	3, 7 2, 0
		74	58	-45	-31	80	-58	248	7	11	-62		-13	
		73	10	19	10	155	-27	7	234	-57	61		-10	
		-61	-17	-42	87	25	106	11	-57	246	48		-54	
		16	-57	-37	80	12	27	-62	61	48	217		41	
		172	-82	0	0	0	0	0	0	0	0		581	
		232	-912	-234	0	0	0	0	0	0	0		899	
		0	22	-115	-16	0	0	0	0	0	0		-345	
		0	0	-50	473	87	0	0	0	0	0		343	
		0	0	0	-23	408	-196	0	0	0	0		-123	
3.	**A** =	0	0	0	0	-26	-338	-77	0	0	0	**b** =	667	
		0	0	0	0	0	195	-606	-42	0	0		538	
		0	0	0	0	0	0	-84	776	209	0		-666	
		0	0	0	0	0	0	0	64	-207	53		724	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-139	-245		980	

Варіант №10

№	СЛАР													Методи
		-19	28	66	-56	-86	-56	90	-97	26			14	
		-6	-66	78	25	-60	10	31	-98	10			-35	
		19	-54	-53	-78	71	-2	35	93	73			57	
		-80	-39	41	-33	-60	-9	-10	-88	-77			-68	
1.	**A** =	-30	-26	-35	-10	-53	92	85	-67	-41		**b** =	-29	
		-75	76	18	98	-39	41	72	91	83			51	
		67	-49	-23	-44	50	-36	-86	91	-53			-41	
		17	40	6	58	89	70	-97	24	-80			-69	
		50	19	-25	51	35	-65	81	-45	91			-14	
		216	129	34	94	18	-49	-53	124	85	-110		4	
		129	200	13	23	40	12	-20	167	41	-60		193	
		34	13	138	-4	-4	-155	-63	53	6	39		-163	
		94	23	-4	76	70	-6	-75	25	70	-39		47	
		18	40	-4	70	232	23	-154	24	123	28		-155	1, 6
2.	**A** =	-49	12	-155	-6	23	204	68	-23	1	-49	**b** =	-187	0, 1
		-53	-20	-63	-75	-154	68	207	-50	-49	-73		-50	
		124	167	53	25	24	-23	-50	237	-2	-66		-15	
		85	41	6	70	123	1	-49	-2	244	4		-10	
		-110	-60	39	-39	28	-49	-73	-66	4	230		185	
		29	22	0	0	0	0	0	0	0	0		-999	
		-60	176	-53	0	0	0	0	0	0	0		731	
		0	46	-186	60	0	0	0	0	0	0		225	
		0	0	-105	580	20	0	0	0	0	0		980	
3.	**A** =	0	0	0	-319	-821	-299	0	0	0	0	**b** =	55	
		0	0	0	0	-2	357	-111	0	0	0		-41	
		0	0	0	0	0	-3	-10	-4	0	0		603	
		0	0	0	0	0	0	42	702	301	0		-545	
		0	0	0	0	0	0	0	33	394	124		-4	
		0	0	0	0	0	0	0	0	741	758		802	

Варіант №11

№	СЛАР													Методи
		27	50	-35	-30	-57	-59	-15	-72	15			82	
		-93	68	-51	66	88	27	-23	-29	1			0	
		-21	37	-79	-92	38	-36	98	32	-83			-30	
		-40	-100	21	31	73	84	84	14	-73			-65	
1.	**A** =	64	43	8	70	8	100	5	43	58		**b** =	-100	
		99	-99	85	-2	32	-41	-44	-15	-75			-9	
		53	-15	5	-46	-17	56	67	20	-85			-79	
		73	-16	35	-63	28	16	55	-52	46			54	
		87	-77	-43	25	13	66	-78	-93	-78			-55	
		247	48	25	74	-63	-160	36	160	79	-1		233	
		48	246	-21	-24	-17	-42	-20	41	-10	-23		62	
		25	-21	233	-102	178	58	-6	47	-97	-40		4	
		74	-24	-102	180	-155	-16	-22	110	146	9		109	
2.	**A** =	-63	-17	178	-155	241	74	43	-18	-126	-9	**b** =	-35	2, 5
		-160	-42	58	-16	74	232	-97	-44	-23	-8		-223	3, 1
		36	-20	-6	-22	43	-97	180	47	-48	-58		-249	
		160	41	47	110	-18	-44	47	227	82	-4		-106	
		79	-10	-97	146	-126	-23	-48	82	195	40		-90	
		-1	-23	-40	9	-9	-8	-58	-4	40	150		-73	
		149	103	0	0	0	0	0	0	0	0		-21	
		41	478	-121	0	0	0	0	0	0	0		-615	
		0	-139	333	42	0	0	0	0	0	0		-754	
		0	0	74	322	125	0	0	0	0	0		-589	
3.	**A** =	0	0	0	260	965	79	0	0	0	0	**b** =	-707	
		0	0	0	0	69	857	-414	0	0	0		-622	
		0	0	0	0	0	275	-759	-12	0	0		-915	
		0	0	0	0	0	0	-200	690	36	0		271	
		0	0	0	0	0	0	0	-121	260	30		-436	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-247	-275		77	

Варіант №12

№	СЛАР													Методи
		10	-28	-8	96	-50	66	-8	28	56			-42	
		3	87	95	-70	2	-61	17	-22	95			46	
		63	-59	-84	81	46	90	71	-90	35			70	
		42	-72	-43	65	52	47	88	66	-99			-46	
1.	**A** =	-36	-100	10	-30	51	-82	1	-28	-22		**b** =	36	
		9	24	73	29	46	-50	-98	27	-73			-42	
		50	57	43	15	97	-62	-13	38	3			36	
		74	13	41	-78	-30	0	67	26	17			6	
		65	-48	42	70	67	-73	83	-80	-43			45	
		166	125	77	65	150	90	111	1	65	-4		-82	
		125	228	-12	-83	199	8	25	-17	43	-27		-232	
		77	-12	210	124	80	78	102	-86	18	65		185	
		65	-83	124	232	11	36	97	-23	60	74		212	
		150	199	80	11	244	52	70	-51	63	6		189	
2.	**A** =	90	8	78	36	52	227	129	-36	44	27	**b** =	90	0, 5 2, 1
		111	25	102	97	70	129	234	-105	1	107		-58	
		1	-17	-86	-23	-51	-36	-105	221	14	-199		-153	
		65	43	18	60	63	44	1	14	116	-13		183	
		-4	-27	65	74	6	27	107	-199	-13	248		-104	
		-617	294	0	0	0	0	0	0	0	0		324	
		215	-515	-119	0	0	0	0	0	0	0		-168	
		0	-165	531	-113	0	0	0	0	0	0		684	
		0	0	62	-818	150	0	0	0	0	0		666	
3.	**A** =	0	0	0	-7	93	13	0	0	0	0	**b** =	-487	
		0	0	0	0	53	295	40	0	0	0		227	
		0	0	0	0	0	-259	891	186	0	0		165	
		0	0	0	0	0	0	-201	-528	57	0		82	
		0	0	0	0	0	0	0	-4	-100	16		740	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-162	541		-471	

Варіант №13

№	СЛАР													Методи
		-48	90	65	93	-23	68	-77	100	-76			93	
		-42	-8	-69	-6	-100	-20	14	-62	-2			-24	
		92	59	0	-6	-60	40	-60	38	57			22	
		14	91	-81	23	-73	-49	-100	-69	39			-3	
1.	**A** =	94	-26	76	3	-27	-50	-11	29	-98		**b** =	-1	
		79	-93	-25	29	-8	-71	-70	-18	49			60	
		64	63	-78	75	-16	52	-82	-100	-66			29	
		72	-38	87	-99	-60	4	-97	-27	56			-90	
		24	14	18	100	-13	-98	-15	-74	50			43	
		105	2	-76	38	-40	-30	-8	-17	-50	-1		-117	
		2	143	66	-22	71	19	-91	10	62	12		-87	
		-76	66	228	-29	48	-50	-14	-3	9	-80		-202	
		38	-22	-29	220	100	44	-41	-145	2	-9		160	
		-40	71	48	100	224	95	-67	-145	111	61		87	
2.	**A** =	-30	19	-50	44	95	195	69	-75	108	139	**b** =	116	1, 6 1, 2
		-8	-91	-14	-41	-67	69	221	-39	11	96		-23	
		-17	10	-3	-145	-145	-75	-39	219	-48	-50		149	
		-50	62	9	2	111	108	11	-48	193	109		235	
		-1	12	-80	-9	61	139	96	-50	109	242		-148	
		-364	-277	0	0	0	0	0	0	0	0		51	
		128	880	-18	0	0	0	0	0	0	0		61	
		0	12	279	41	0	0	0	0	0	0		723	
		0	0	19	88	2	0	0	0	0	0		-30	
3.	**A** =	0	0	0	-278	988	-389	0	0	0	0	**b** =	-213	
		0	0	0	0	-341	-781	-75	0	0	0		343	
		0	0	0	0	0	-14	-103	27	0	0		483	
		0	0	0	0	0	0	69	256	110	0		40	
		0	0	0	0	0	0	0	-291	946	-341		-305	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-319	393		-700	

Варіант №14

№	СЛАР													Методи
		-26	-81	84	-13	77	15	-96	54	65			33	
		-45	81	46	-62	-39	-33	38	80	-64			-62	
		49	17	68	95	-36	29	-70	93	-90			-41	
		63	68	2	-45	46	62	21	2	97			-84	
1.	**A** =	-14	76	26	67	-18	16	7	-32	26		**b** =	5	
		-64	-68	-45	-64	-39	7	-54	58	27			-41	
		18	68	81	-25	73	27	59	-39	-97			-8	
		-53	16	-33	-11	-88	53	99	-39	81			52	
		-66	24	60	-7	-97	-32	40	-11	-50			34	
		241	-49	-64	-32	83	-73	57	66	-17	-47		-1	
		-49	42	65	-9	-45	25	8	10	0	16		-54	
		-64	65	207	71	-195	103	41	27	43	92		-167	
		-32	-9	71	241	-129	79	83	144	98	30		-50	
2.	**A** =	83	-45	-195	-129	216	-93	-48	-36	-86	-84	**b** =	83	3, 7
		-73	25	103	79	-93	218	-36	-2	-58	182		-213	0, 2
		57	8	41	83	-48	-36	236	62	152	-69		227	
		66	10	27	144	-36	-2	62	245	44	-35		-113	
		-17	0	43	98	-86	-58	152	44	241	-25		-250	
		-47	16	92	30	-84	182	-69	-35	-25	244		210	
		391	-1	0	0	0	0	0	0	0	0		969	
		-4	72	-27	0	0	0	0	0	0	0		718	
		0	7	-19	7	0	0	0	0	0	0		571	
		0	0	-134	-460	30	0	0	0	0	0		27	
3.	**A** =	0	0	0	-23	281	-83	0	0	0	0	**b** =	-645	
		0	0	0	0	-374	896	-353	0	0	0		-203	
		0	0	0	0	0	-238	-716	86	0	0		-733	
		0	0	0	0	0	0	-66	147	63	0		-939	
		0	0	0	0	0	0	0	109	458	-200		879	
		0	0	0	0	0	0	0	0	626	721		-398	

Варіант №15

№	СЛАР													Методи
		-47	46	-100	60	-63	-97	-39	22	-93			66	
		59	53	-54	-13	-77	56	-46	61	-6			89	
		-71	85	43	23	52	-45	-62	93	0			14	
		33	27	-67	100	48	-82	84	53	-2			-58	
1.	**A** =	44	-52	-98	93	69	52	-49	70	93		**b** =	87	
		36	-11	-8	-19	32	-85	-70	-6	5			47	
		83	21	0	28	30	34	-94	45	-17			-42	
		-54	52	49	-26	92	96	31	44	-45			-90	
		73	90	-35	42	-57	40	-11	-27	41			-17	
		213	-60	-175	8	60	33	-25	71	-94	-132		-16	
		-60	227	59	-54	-29	16	70	33	-25	82		-242	
		-175	59	221	-57	-104	-32	-40	5	104	48		-244	
		8	-54	-57	106	28	27	45	-88	-31	25		-248	
2.	**A** =	60	-29	-104	28	213	24	87	-14	44	25	**b** =	-95	1, 3 2, 0
		33	16	-32	27	24	55	33	30	34	2		155	
		-25	70	-40	45	87	33	235	-86	-19	40		2	
		71	33	5	-88	-14	30	-86	223	98	-18		137	
		-94	-25	104	-31	44	34	-19	98	246	79		129	
		-132	82	48	25	25	2	40	-18	79	214		81	
		-409	-136	0	0	0	0	0	0	0	0		-887	
		10	-66	-31	0	0	0	0	0	0	0		44	
		0	40	685	243	0	0	0	0	0	0		-328	
		0	0	-16	-304	-135	0	0	0	0	0		-649	
3.	**A** =	0	0	0	105	-646	-109	0	0	0	0	**b** =	-582	
		0	0	0	0	-304	797	389	0	0	0		811	
		0	0	0	0	0	16	80	39	0	0		351	
		0	0	0	0	0	0	-36	-425	-15	0		-63	
		0	0	0	0	0	0	0	168	528	-211		825	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-181	-644		-792	

Варіант №16

№	СЛАР													Методи
		11	-84	-62	-86	-66	1	25	9	-46			65	
		27	-62	90	-36	-36	11	66	56	3			69	
		-91	-54	-2	-51	99	54	-29	24	68			-88	
		-25	41	-69	-63	48	100	14	-46	85			-26	
1.	**A** =	-79	-70	87	46	-41	1	55	22	-54		**b** =	89	
		-65	86	-19	100	39	93	-44	-12	-78			-54	
		-52	32	-4	75	-15	6	88	89	-86			-2	
		-96	-7	83	-26	-33	86	93	-89	-38			19	
		47	2	-82	64	77	36	19	-24	-24			58	
		70	-26	36	-22	64	-69	-28	48	26	-5		248	
		-26	193	-33	-30	33	-36	172	-53	-178	-26		-185	
		36	-33	140	81	25	-88	0	-23	28	66		188	
		-22	-30	81	235	-118	-5	-9	-87	-38	33		100	
		64	33	25	-118	240	-107	47	33	41	-16		-142	
2.	**A** =	-69	-36	-88	-5	-107	157	-59	-23	21	-60	**b** =	160	4, 7 2, 1
		-28	172	0	-9	47	-59	230	-41	-178	54		-197	
		48	-53	-23	-87	33	-23	-41	101	70	-6		59	
		26	-178	28	-38	41	21	-178	70	250	-23		-234	
		-5	-26	66	33	-16	-60	54	-6	-23	228		22	
		491	232	0	0	0	0	0	0	0	0		262	
		-39	124	12	0	0	0	0	0	0	0		-821	
		0	-146	-400	-115	0	0	0	0	0	0		-839	
		0	0	-338	790	-203	0	0	0	0	0		555	
		0	0	0	-52	-893	-435	0	0	0	0		811	
3.	**A** =	0	0	0	0	-241	795	-323	0	0	0	**b** =	68	
		0	0	0	0	0	-17	-385	-153	0	0		-782	
		0	0	0	0	0	0	-166	991	-201	0		652	
		0	0	0	0	0	0	0	-177	-876	-397		-324	
		0	0	0	0	0	0	0	0	5	11		-412	

Варіант №17

№	СЛАР													Методи
		-73	98	66	-73	-38	-7	75	-64	-34			79	
		-30	70	-93	89	39	73	86	31	89			93	
		-29	87	-78	64	-4	74	-87	-75	43			-76	
		93	-20	-87	81	15	-59	27	-49	-84			-26	
1.	**A** =	36	-54	-12	-56	4	4	-66	88	-9		**b** =	85	
		81	-92	-72	8	-95	64	-81	-63	86			-32	
		97	35	33	19	-33	17	63	-37	-58			30	
		-84	-20	7	-69	25	66	48	-58	77			6	
		-56	-98	88	-75	-40	50	-25	70	29			28	
		42	-3	-5	4	5	8	5	4	6	12		8	
		-3	36	31	21	-2	11	0	11	17	0		18	
		-5	31	39	13	6	23	14	-1	14	-5		4	
		4	21	13	23	-2	9	5	24	18	9		-5	
		5	-2	6	-2	13	6	3	-4	-4	-2		9	
2.	**A** =	8	11	23	9	6	42	26	1	20	1	**b** =	16	1, 6 0, 2
		5	0	14	5	3	26	48	2	5	10		24	
		4	11	-1	24	-4	1	2	52	33	19		32	
		6	17	14	18	-4	20	5	33	53	6		37	
		12	0	-5	9	-2	1	10	19	6	36		34	
		868	539	0	0	0	0	0	0	0	0		-450	
		8	-31	-3	0	0	0	0	0	0	0		434	
		0	460	944	343	0	0	0	0	0	0		-433	
		0	0	-10	-222	-56	0	0	0	0	0		793	
3.	**A** =	0	0	0	218	569	235	0	0	0	0	**b** =	653	
		0	0	0	0	12	117	-41	0	0	0		-220	
		0	0	0	0	0	-40	800	-235	0	0		-4	
		0	0	0	0	0	0	210	800	306	0		390	
		0	0	0	0	0	0	0	74	-430	70		669	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-140	-755		219	

Варіант №18

№	СЛАР		Методи
1.	$A = \begin{pmatrix} -68 & -18 & 95 & -91 & -55 & 67 & -64 & 1 & -63 \\ 60 & 35 & -73 & 84 & 66 & -5 & 87 & 24 & -43 \\ -96 & 15 & -85 & 77 & -91 & -38 & 75 & -31 & 50 \\ -74 & 70 & -42 & -48 & 96 & 12 & -41 & -23 & 84 \\ -42 & -64 & 47 & -61 & 12 & 66 & 15 & 95 & -89 \\ -65 & -24 & -33 & 63 & -91 & 39 & -22 & -50 & 41 \\ 40 & -25 & -32 & -75 & -93 & 67 & -74 & -21 & -42 \\ -87 & -60 & -22 & 25 & 51 & -94 & 5 & 59 & 15 \\ -20 & -72 & 88 & 79 & 92 & 52 & 8 & -79 & -36 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} -54 \\ -98 \\ -54 \\ -43 \\ 88 \\ 89 \\ -52 \\ 69 \\ -48 \end{pmatrix}$	
2.	$A = \begin{pmatrix} 106 & 59 & 8 & 70 & 6 & 19 & 49 & 6 & 13 & 44 \\ 59 & 152 & 33 & 111 & 61 & 96 & 8 & 78 & 70 & 83 \\ 8 & 33 & 104 & 20 & 21 & 66 & 45 & 6 & 54 & 81 \\ 70 & 111 & 20 & 148 & 17 & 109 & 36 & 63 & 22 & 32 \\ 6 & 61 & 21 & 17 & 49 & 40 & 7 & 25 & 58 & 49 \\ 19 & 96 & 66 & 109 & 40 & 133 & 47 & 59 & 60 & 55 \\ 49 & 8 & 45 & 36 & 7 & 47 & 152 & 12 & 39 & 46 \\ 6 & 78 & 6 & 63 & 25 & 59 & 12 & 123 & 52 & 30 \\ 13 & 70 & 54 & 22 & 58 & 60 & 39 & 52 & 111 & 84 \\ 44 & 83 & 81 & 32 & 49 & 55 & 46 & 30 & 84 & 144 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 154 \\ 13 \\ 64 \\ 37 \\ 125 \\ 27 \\ 10 \\ 91 \\ 136 \\ 60 \end{pmatrix}$	0, 5 3, 1
3.	$A = \begin{pmatrix} 150 & -52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & -87 & 33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -212 & 442 & 77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -123 & -47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -110 & 630 & -160 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -39 & -315 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 124 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 31 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -44 & 445 & 148 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -643 & -732 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} -832 \\ -673 \\ -352 \\ -397 \\ -977 \\ 80 \\ -810 \\ -707 \\ 262 \\ 719 \end{pmatrix}$	

Варіант №19

№	СЛАР													Методи
		47	-83	76	10	-93	83	-3	-37	97			-52	
		14	76	19	23	-32	42	-12	31	-71			18	
		-77	-20	-32	15	-97	65	-43	19	-67			64	
		-43	-29	-29	22	-3	54	78	-100	-3			-32	
1.	**A** =	-66	-56	78	-48	66	15	62	-4	89		**b** =	20	
		69	-88	1	-81	-66	76	32	-30	-64			-4	
		-94	31	-71	-83	8	54	82	-96	48			88	
		-70	-4	-5	69	-74	67	-55	53	64			-96	
		91	-44	0	80	-52	-36	18	78	-7			6	
		187	-12	-22	-16	28	-13	31	-4	21	23		240	
		-12	204	-129	34	-7	84	78	119	-58	89		-211	
		-22	-129	198	70	-63	-5	-44	-49	25	-87		-100	
		-16	34	70	237	-105	76	9	84	-62	-21		-185	
		28	-7	-63	-105	239	6	-79	45	-9	-16		124	
2.	**A** =	-13	84	-5	76	6	140	66	80	-25	-6	**b** =	-24	3, 7 1, 2
		31	78	-44	9	-79	66	162	-10	-24	55		-83	
		-4	119	-49	84	45	80	-10	200	-103	15		83	
		21	-58	25	-62	-9	-25	-24	-103	121	-7		-175	
		23	89	-87	-21	-16	-6	55	15	-7	245		-212	
		493	-482	0	0	0	0	0	0	0	0		597	
		152	-904	93	0	0	0	0	0	0	0		886	
		0	12	52	11	0	0	0	0	0	0		368	
		0	0	-119	563	108	0	0	0	0	0		-736	
3.	**A** =	0	0	0	-12	113	-50	0	0	0	0	**b** =	446	
		0	0	0	0	-91	561	61	0	0	0		-780	
		0	0	0	0	0	-191	483	-180	0	0		-765	
		0	0	0	0	0	0	-1	99	39	0		282	
		0	0	0	0	0	0	0	140	598	-268		-343	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-703	-855		308	

Варіант №20

№	СЛАР													Методи
		15	51	-56	84	85	57	34	65	-72			-98	
		11	48	3	-77	59	-97	44	73	82			37	
		-93	-6	47	-100	-18	-100	98	-23	37			70	
		3	-35	57	64	-56	12	5	-60	-21			-17	
1.	**A** =	-40	40	66	47	58	-21	-74	22	14		**b** =	-71	
		-100	55	18	-31	-11	-24	-36	98	8			-48	
		67	12	-95	27	35	-21	-33	69	99			15	
		1	94	-33	-59	-60	50	47	-33	92			-36	
		88	-12	-78	-87	-78	-99	92	-5	1			68	
		247	38	77	55	-14	-90	83	-54	58	-35		-100	
		38	249	-9	185	-201	107	-36	48	12	-6		-200	
		77	-9	68	39	42	2	29	-51	17	-46		-82	
		55	185	39	245	-99	46	-80	19	-9	-37		197	
		-14	-201	42	-99	242	-82	50	-148	48	-62		-217	
2.	**A** =	-90	107	2	46	-82	191	14	5	28	-12	**b** =	-114	1, 6 1, 3
		83	-36	29	-80	50	14	155	-108	106	-40		-39	
		-54	48	-51	19	-148	5	-108	225	-110	82		-84	
		58	12	17	-9	48	28	106	-110	199	-27		-179	
		-35	-6	-46	-37	-62	-12	-40	82	-27	147		-29	
		499	83	0	0	0	0	0	0	0	0		62	
		-127	480	113	0	0	0	0	0	0	0		-817	
		0	345	942	-389	0	0	0	0	0	0		-189	
		0	0	-35	-267	49	0	0	0	0	0		-791	
		0	0	0	56	196	-26	0	0	0	0		-776	
3.	**A** =	0	0	0	0	-243	-588	160	0	0	0	**b** =	569	
		0	0	0	0	0	-66	-589	30	0	0		-417	
		0	0	0	0	0	0	77	-542	-8	0		207	
		0	0	0	0	0	0	0	197	-697	-278		929	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-216	-412		-135	

Варіант №21

№	СЛАР													Методи
		26	65	-32	-35	91	70	27	-96	25			-69	
		-55	88	-11	71	-15	-18	-10	29	-46			1	
		-69	12	-78	52	-93	-77	-95	3	-20			-45	
		-86	-11	-60	-83	-1	-39	54	13	41			-79	
1.	**A** =	-61	-22	99	-56	-64	-79	-46	53	-58		**b** =	-97	
		41	-46	-18	84	69	38	-71	-84	-26			-72	
		87	-14	-60	40	12	13	-58	-18	-50			87	
		93	-91	65	-85	-26	-12	91	4	58			44	
		33	-34	-75	-72	-66	15	84	11	-72			-15	
		188	-32	-9	7	-61	49	-53	23	-31	62		-44	
		-32	101	11	-32	-80	1	53	-7	94	-109		74	
		-9	11	231	96	-62	-12	72	-40	72	-77		87	
		7	-32	96	174	-37	-119	19	7	-27	27		247	
		-61	-80	-62	-37	184	-34	-115	45	-53	46		-39	
2.	**A** =	49	1	-12	-119	-34	182	80	-56	-4	18	**b** =	168	0, 4 3, 1
		-53	53	72	19	-115	80	231	-101	70	-50		192	
		23	-7	-40	7	45	-56	-101	227	-10	23		-199	
		-31	94	72	-27	-53	-4	70	-10	241	-155		-194	
		62	-109	-77	27	46	18	-50	23	-155	212		243	
		390	201	0	0	0	0	0	0	0	0		446	
		21	-135	-53	0	0	0	0	0	0	0		62	
		0	-271	868	-203	0	0	0	0	0	0		-783	
		0	0	-7	596	160	0	0	0	0	0		264	
		0	0	0	-47	-208	-96	0	0	0	0		-747	
3.	**A** =	0	0	0	0	-24	347	-17	0	0	0	**b** =	-732	
		0	0	0	0	0	-96	220	-40	0	0		-803	
		0	0	0	0	0	0	107	546	-204	0		-716	
		0	0	0	0	0	0	0	-301	-740	-364		-664	
		0	0	0	0	0	0	0	0	48	-154		-608	

Варіант №22

№	СЛАР		Методи
1.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} 57 & -54 & -72 & -73 & 29 & -97 & 45 & -74 & 23 \\ -33 & -80 & -40 & -84 & 12 & -45 & -21 & -55 & 47 \\ -24 & -30 & -5 & 41 & -100 & 55 & 57 & 46 & -31 \\ 62 & 51 & -11 & -26 & 5 & 83 & 55 & -45 & 47 \\ 10 & -35 & 16 & 66 & 32 & -81 & 28 & -63 & -13 \\ 9 & -14 & 65 & -66 & -90 & 84 & 49 & 63 & 80 \\ 78 & -96 & -99 & -23 & 57 & -44 & -26 & -50 & -65 \\ 65 & -27 & 81 & -52 & -26 & -93 & -64 & -49 & 27 \\ 91 & 36 & 79 & -79 & -63 & -70 & 89 & -57 & -18 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} 37 \\ 99 \\ 53 \\ 11 \\ 93 \\ 8 \\ -96 \\ 60 \\ -87 \end{matrix}$	0, 7 2, 0
2.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} 159 & -71 & -32 & -84 & 121 & -12 & 8 & 40 & -23 & -74 \\ -71 & 196 & -29 & -53 & -61 & -93 & 58 & -11 & 34 & 35 \\ -32 & -29 & 71 & 83 & -6 & -32 & -22 & -83 & 8 & 41 \\ -84 & -53 & 83 & 154 & -55 & 25 & -49 & -72 & -20 & 56 \\ 121 & -61 & -6 & -55 & 198 & 5 & 91 & -16 & -77 & -78 \\ -12 & -93 & -32 & 25 & 5 & 203 & 42 & 49 & -33 & -72 \\ 8 & 58 & -22 & -49 & 91 & 42 & 244 & 24 & -78 & -82 \\ 40 & -11 & -83 & -72 & -16 & 49 & 24 & 218 & -89 & -110 \\ -23 & 34 & 8 & -20 & -77 & -33 & -78 & -89 & 204 & 92 \\ -74 & 35 & 41 & 56 & -78 & -72 & -82 & -110 & 92 & 189 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} 90 \\ 146 \\ -110 \\ -109 \\ 67 \\ 161 \\ 74 \\ 192 \\ -211 \\ 195 \end{matrix}$	
3.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} -365 & -134 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -141 & -565 & 222 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 407 & -128 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -243 & -576 & 238 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 414 & -77 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 82 & -668 & 325 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -160 & -659 & -68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 157 & -852 & -83 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -94 & 966 & 116 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -164 & -692 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} -678 \\ 516 \\ 743 \\ -299 \\ 371 \\ -412 \\ 61 \\ 665 \\ 195 \\ -330 \end{matrix}$	

Варіант №23

<table>
<tr><th>№</th><th colspan="2">СЛАР</th><th>Методи</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>

$$\mathbf{A} = \begin{matrix}
-68 & -54 & 50 & 1 & -31 & -48 & -11 & -43 & 97 \\
-95 & -58 & 17 & 85 & -76 & 8 & -1 & -89 & -9 \\
45 & 68 & 50 & 68 & -95 & -85 & -83 & 47 & -71 \\
-93 & -80 & 86 & 19 & -24 & 60 & 88 & -7 & -43 \\
62 & 97 & 43 & 24 & 10 & 76 & 87 & 10 & 43 \\
24 & -70 & -32 & -47 & -30 & -79 & -21 & 79 & 17 \\
80 & -26 & 48 & -24 & 65 & 82 & -76 & -51 & 77 \\
11 & 86 & -72 & 75 & 79 & 15 & 72 & 36 & -22 \\
13 & -11 & 72 & -30 & -6 & 80 & -10 & 42 & -1
\end{matrix}$$

</td><td>

$$\mathbf{b} = \begin{matrix} 95 \\ 38 \\ 87 \\ 76 \\ 57 \\ -24 \\ -67 \\ -17 \\ 20 \end{matrix}$$

</td><td rowspan="3">3, 5
1, 2</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>

$$\mathbf{A} = \begin{matrix}
32 & 27 & -10 & -10 & -15 & -9 & 15 & 19 & 2 & 23 \\
27 & 42 & -3 & -6 & -3 & -21 & 25 & 16 & 2 & 18 \\
-10 & -3 & 34 & 4 & 12 & -14 & -17 & 2 & -8 & 7 \\
-10 & -6 & 4 & 36 & 8 & -19 & -10 & -25 & 11 & -8 \\
-15 & -3 & 12 & 8 & 35 & 0 & -1 & -20 & 14 & -2 \\
-9 & -21 & -14 & -19 & 0 & 49 & -6 & 10 & 2 & -9 \\
15 & 25 & -17 & -10 & -1 & -6 & 49 & -11 & 13 & -14 \\
19 & 16 & 2 & -25 & -20 & 10 & -11 & 50 & -20 & 28 \\
2 & 2 & -8 & 11 & 14 & 2 & 13 & -20 & 25 & -5 \\
23 & 18 & 7 & -8 & -2 & -9 & -14 & 28 & -5 & 45
\end{matrix}$$

</td><td>

$$\mathbf{b} = \begin{matrix} 5 \\ 13 \\ -25 \\ 13 \\ 21 \\ -20 \\ -27 \\ 12 \\ 5 \\ 35 \end{matrix}$$

</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>

$$\mathbf{A} = \begin{matrix}
-402 & -38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-22 & -155 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -37 & 485 & -34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -357 & -751 & -158 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 56 & -365 & 167 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -37 & 872 & -226 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 137 & 528 & 127 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -192 & 488 & 88 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21 & -74 & -29 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -420 & 647
\end{matrix}$$

</td><td>

$$\mathbf{b} = \begin{matrix} -673 \\ 332 \\ 789 \\ 33 \\ 406 \\ -693 \\ 907 \\ 82 \\ 360 \\ -927 \end{matrix}$$

</td></tr>
</table>

Варіант №24

№	СЛАР													Методи
		-58	-4	32	-85	-64	-55	-90	-68	-60			59	
		100	3	-63	73	-67	-98	-87	57	-43			44	
		-4	71	40	7	-22	-80	-3	45	82			-98	
		-82	78	-61	-46	11	-34	-56	55	-94			-16	
1.	**A** =	1	-55	-66	-61	8	-41	-46	-59	-10		**b** =	-91	
		92	8	85	40	24	-40	94	-91	78			20	
		78	-39	-92	65	-91	21	-49	-46	-75			-31	
		89	100	-85	-74	-60	-100	-66	14	-20			-1	
		84	-90	-59	-94	17	-1	61	3	-32			-47	
		389	247	193	-39	-41	279	27	20	102	-6		497	
		247	494	147	-52	159	167	115	290	296	10		482	
		193	147	335	114	-54	338	48	134	129	-28		304	
		-39	-52	114	183	13	177	-58	-18	75	-35		164	
		-41	159	-54	13	179	-20	-9	131	164	-27		283	
2.	**A** =	279	167	338	177	-20	465	16	47	150	-100	**b** =	-45	1, 6 0, 1
		27	115	48	-58	-9	16	390	142	-27	-74		11	
		20	290	134	-18	131	47	142	468	307	-51		381	
		102	296	129	75	164	150	-27	307	431	88		342	
		-6	10	-28	-35	-27	-100	-74	-51	88	456		134	
		619	308	0	0	0	0	0	0	0	0		-219	
		19	-760	-132	0	0	0	0	0	0	0		633	
		0	-9	93	-8	0	0	0	0	0	0		-365	
		0	0	-156	-639	-306	0	0	0	0	0		629	
		0	0	0	130	848	366	0	0	0	0		578	
3.	**A** =	0	0	0	0	283	-673	198	0	0	0	**b** =	705	
		0	0	0	0	0	-9	155	-38	0	0		11	
		0	0	0	0	0	0	-136	504	-219	0		271	
		0	0	0	0	0	0	0	92	535	115		902	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-46	284		-112	

Варіант №25

№	СЛАР													Методи
		-4	1	48	40	31	19	-25	50	-26			-7	
		73	37	97	99	13	-96	0	33	65			-56	
		33	-34	52	-41	-75	37	27	-40	-27			86	
		18	-76	71	23	-95	-43	28	91	-27			23	
1.	**A** =	-75	-80	-24	-49	77	28	14	17	-39		**b** =	-81	
		-64	18	16	-82	-76	36	55	-41	-28			25	
		-79	87	-49	-77	3	-31	-4	63	54			29	
		20	74	21	41	24	-82	-100	5	12			-64	
		26	21	-48	100	21	50	1	-70	82			-60	
		388	37	-48	38	8	77	13	98	138	-11		421	
		37	320	152	62	9	164	34	13	-7	56		366	
		-48	152	322	133	40	193	163	47	48	-1		155	
		38	62	133	413	188	265	207	195	203	84		-4	
2.	**A** =	8	9	40	188	193	158	8	94	88	-15	**b** =	382	1, 5
		77	164	193	265	158	402	78	185	48	58		56	2, 1
		13	34	163	207	8	78	438	242	242	100		27	
		98	13	47	195	94	185	242	292	116	45		229	
		138	-7	48	203	88	48	242	116	437	-26		407	
		-11	56	-1	84	-15	58	100	45	-26	347		56	
		-880	645	0	0	0	0	0	0	0	0		447	
		-38	263	131	0	0	0	0	0	0	0		-305	
		0	84	-552	58	0	0	0	0	0	0		321	
		0	0	-81	-226	-107	0	0	0	0	0		-232	
3.	**A** =	0	0	0	-50	-158	35	0	0	0	0	**b** =	255	
		0	0	0	0	88	-259	61	0	0	0		-957	
		0	0	0	0	0	-46	142	64	0	0		822	
		0	0	0	0	0	0	199	-470	-130	0		601	
		0	0	0	0	0	0	0	-104	-253	35		492	
		0	0	0	0	0	0	0	0	-581	-639		627	

Варіант №26

<table>
<tr><th>№</th><th colspan="2">СЛАР</th><th>Методи</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>$\mathbf{A} = \begin{matrix} -80 & -97 & 48 & -13 & -52 & -5 & 48 & 25 & -95 \\ -78 & 87 & -80 & 94 & -8 & -68 & 29 & -45 & -79 \\ -89 & 26 & 39 & -24 & -76 & -97 & 39 & -17 & -62 \\ -77 & 84 & 96 & -58 & 99 & 74 & -46 & 4 & 100 \\ -28 & 17 & 88 & 46 & 9 & 60 & -91 & 74 & -47 \\ -27 & -25 & -64 & -20 & -78 & -13 & -38 & -96 & 32 \\ -2 & -60 & -48 & -15 & 7 & 31 & -93 & 57 & -70 \\ -29 & -36 & 99 & 89 & 58 & 92 & -15 & -29 & -76 \\ -81 & 19 & -7 & 11 & 89 & -86 & -24 & 77 & 61 \end{matrix}$</td><td>$\mathbf{b} = \begin{matrix} 29 \\ 17 \\ -62 \\ 17 \\ 69 \\ -91 \\ -58 \\ 38 \\ -42 \end{matrix}$</td><td rowspan="3">0, 7
0, 1</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\mathbf{A} = \begin{matrix} 644 & 322 & -278 & 259 & 245 & 0 & -196 & 59 & -24 & 105 \\ 322 & 677 & -43 & 350 & 287 & 66 & -151 & -111 & 96 & -45 \\ -278 & -43 & 725 & 94 & -440 & 59 & -238 & -1 & -319 & -421 \\ 259 & 350 & 94 & 430 & -45 & 171 & -203 & -321 & 95 & -56 \\ 245 & 287 & -440 & -45 & 690 & -254 & 248 & 22 & 220 & 241 \\ 0 & 66 & 59 & 171 & -254 & 321 & -183 & -134 & 28 & -37 \\ -196 & -151 & -238 & -203 & 248 & -183 & 589 & -35 & 157 & 128 \\ 59 & -111 & -1 & -321 & 22 & -134 & -35 & 711 & -391 & -117 \\ -24 & 96 & -319 & 95 & 220 & 28 & 157 & -391 & 645 & 104 \\ 105 & -45 & -421 & -56 & 241 & -37 & 128 & -117 & 104 & 411 \end{matrix}$</td><td>$\mathbf{b} = \begin{matrix} 399 \\ -33 \\ -1162 \\ -306 \\ -309 \\ -660 \\ -7 \\ -35 \\ -275 \\ -1149 \end{matrix}$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$\mathbf{A} = \begin{matrix} 427 & 101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 136 & -314 & -117 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 68 & 461 & 154 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 51 & -204 & 68 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & -355 & 170 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17 & 99 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 72 & -279 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -15 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 117 & -345 & 82 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -850 & 909 \end{matrix}$</td><td>$\mathbf{b} = \begin{matrix} -286 \\ 325 \\ -437 \\ -540 \\ 422 \\ 249 \\ 181 \\ 321 \\ -905 \\ -303 \end{matrix}$</td></tr>
</table>

Варіант №27

№	СЛАР		Методи
1.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} 81 & -44 & -100 & 11 & -22 & 0 & 27 & -46 & -69 \\ -92 & 81 & 5 & -3 & 12 & 15 & 46 & -1 & -29 \\ 2 & -18 & 55 & -2 & -37 & -97 & 75 & 51 & -54 \\ 96 & -99 & 77 & 38 & -70 & -50 & 57 & 15 & -59 \\ 36 & 65 & 93 & 0 & 39 & -31 & 30 & -10 & 32 \\ 40 & -73 & -98 & 70 & -1 & -44 & -11 & 12 & -85 \\ 79 & 34 & 25 & -52 & 71 & -85 & -56 & -76 & -100 \\ 53 & 84 & -43 & -42 & 87 & 51 & -56 & 78 & 37 \\ 36 & 94 & -68 & 14 & -5 & 52 & -44 & -20 & -23 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} -53 \\ 3 \\ -91 \\ -85 \\ -21 \\ 57 \\ -89 \\ 74 \\ -93 \end{matrix}$	
2.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} 153 & 39 & 82 & 22 & 19 & 4 & 59 & -50 & -11 & 31 \\ 39 & 313 & 146 & 47 & -2 & 269 & 7 & -35 & 7 & 194 \\ 82 & 146 & 333 & 51 & 105 & 37 & 54 & 62 & 120 & 136 \\ 22 & 47 & 51 & 322 & 213 & 118 & 78 & 227 & 34 & 102 \\ 19 & -2 & 105 & 213 & 236 & 31 & 53 & 161 & 92 & 1 \\ 4 & 269 & 37 & 118 & 31 & 310 & 41 & 12 & 22 & 142 \\ 59 & 7 & 54 & 78 & 53 & 41 & 112 & 31 & 70 & 15 \\ -50 & -35 & 62 & 227 & 161 & 12 & 31 & 333 & 130 & -3 \\ -11 & 7 & 120 & 34 & 92 & 22 & 70 & 130 & 292 & -21 \\ 31 & 194 & 136 & 102 & 1 & 142 & 15 & -3 & -21 & 313 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} 118 \\ 170 \\ 151 \\ 207 \\ -9 \\ 273 \\ 280 \\ 86 \\ -36 \\ 172 \end{matrix}$	1, 6 1, 2
3.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} -97 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 153 & 430 & -94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -167 & 462 & 155 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & -723 & -97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 614 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -111 & 754 & -38 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -424 & 928 & 438 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 104 & -622 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49 & 350 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -599 & 623 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} -833 \\ 950 \\ 303 \\ -538 \\ -193 \\ -756 \\ -463 \\ -485 \\ -337 \\ -696 \end{matrix}$	

Варіант №28

№	СЛАР		Методи
1.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} 57 & -69 & 3 & 81 & -11 & 17 & -50 & 80 & 14 \\ 3 & 26 & 47 & 87 & 43 & -22 & 23 & 14 & 4 \\ -89 & 53 & -8 & 95 & -93 & 70 & 77 & -71 & 2 \\ 65 & -78 & 27 & 23 & 45 & -5 & -58 & 32 & -77 \\ 38 & 76 & 12 & -16 & -88 & 62 & -99 & -84 & -75 \\ 3 & 15 & 50 & -44 & 38 & 32 & 44 & 43 & -9 \\ -54 & -73 & -62 & -45 & 35 & 41 & -23 & 39 & -6 \\ 80 & -21 & -83 & 87 & -14 & 28 & -96 & -77 & 34 \\ 6 & 99 & -76 & 38 & 25 & -11 & 31 & -72 & 34 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} 10 \\ -21 \\ -94 \\ 93 \\ 87 \\ 68 \\ -100 \\ 37 \\ 55 \end{matrix}$	
2.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} 20 & -12 & -11 & 4 & 1 & 10 & -10 & -2 & -1 & 7 \\ -12 & 20 & 16 & 6 & 2 & -16 & 7 & 2 & -1 & -7 \\ -11 & 16 & 24 & 1 & 5 & -11 & 11 & 2 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & 1 & 9 & 0 & -5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 10 & 6 & -2 & 4 & -6 & 0 \\ 10 & -16 & -11 & -5 & 6 & 28 & -5 & 11 & -3 & 12 \\ -10 & 7 & 11 & 1 & -2 & -5 & 19 & -1 & 11 & -6 \\ -2 & 2 & 2 & -1 & 4 & 11 & -1 & 22 & -15 & 14 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -6 & -3 & 11 & -15 & 30 & -4 \\ 7 & -7 & -2 & -1 & 0 & 12 & -6 & 14 & -4 & 30 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} -27 \\ 15 \\ 8 \\ -20 \\ 28 \\ -13 \\ 30 \\ -35 \\ 14 \\ 1 \end{matrix}$	4, 7 0, 3
3.	$\mathbf{A} = \begin{matrix} -304 & -230 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -312 & 769 & 331 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -91 & -202 & -32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 139 & 472 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 147 & 373 & -166 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -178 & -393 & -120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 98 & 441 & 167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -71 & 165 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -129 & 601 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 418 & 970 \end{matrix}$	$\mathbf{b} = \begin{matrix} 678 \\ -134 \\ -59 \\ 121 \\ -462 \\ 498 \\ 8 \\ 294 \\ -385 \\ -723 \end{matrix}$	

Варіант №29

№	СЛАР													Методи
		30	-64	-96	49	-13	-75	-12	-47	89			-70	
		-35	-26	36	-28	-69	78	-96	62	-18			-70	
		39	41	-57	-82	9	30	-72	92	4			16	
		-8	48	-39	-82	95	-16	26	27	-89			-53	
1.	**A** =	-71	25	-22	-72	-90	-28	52	47	81		**b** =	30	
		-37	23	-83	80	79	15	-82	-59	-81			12	
		-98	-47	42	-29	-33	11	75	95	48			28	
		-71	40	28	60	68	-64	67	11	78			-71	
		-26	-33	32	78	75	-80	23	66	22			-56	
		41	21	12	24	-18	-19	-27	-4	10	-14		-36	
		21	47	19	-1	-9	-25	-14	-3	-2	-1		7	
		12	19	24	6	13	-15	-14	4	-11	6		-30	
		24	-1	6	36	-6	-19	-29	-6	25	4		16	
		-18	-9	13	-6	41	-3	-4	24	-25	7		48	
2.	**A** =	-19	-25	-15	-19	-3	49	30	-3	-12	1	**b** =	-3	3, 4 2, 1
		-27	-14	-14	-29	-4	30	50	-3	-17	16		22	
		-4	-3	4	-6	24	-3	-3	33	-22	-5		25	
		10	-2	-11	25	-25	-12	-17	-22	43	5		46	
		-14	-1	6	4	7	1	16	-5	5	44		19	
		-49	-13	0	0	0	0	0	0	0	0		-255	
		162	577	97	0	0	0	0	0	0	0		186	
		0	-351	-733	44	0	0	0	0	0	0		745	
		0	0	175	-399	192	0	0	0	0	0		867	
3.	**A** =	0	0	0	128	-427	169	0	0	0	0	**b** =	337	
		0	0	0	0	75	195	87	0	0	0		-587	
		0	0	0	0	0	22	98	7	0	0		308	
		0	0	0	0	0	0	-51	-949	139	0		-856	
		0	0	0	0	0	0	0	-5	42	18		-187	
		0	0	0	0	0	0	0	0	460	659		334	

Варіант №30

<table>
<tr><th>№</th><th colspan="2">СЛАР</th><th>Методи</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>$\mathbf{A} = \begin{matrix} -27 & -93 & -74 & -45 & 67 & 74 & 17 & 96 & -36 \\ 59 & 79 & -66 & 45 & -90 & 20 & -58 & -61 & -62 \\ 73 & -82 & -1 & 9 & -79 & -27 & 40 & 26 & 52 \\ -39 & 91 & -95 & 80 & 52 & -26 & -14 & -10 & -42 \\ -23 & -64 & -10 & 61 & -33 & -98 & -28 & 12 & 22 \\ 17 & 45 & 23 & 58 & 27 & -27 & -78 & 99 & -64 \\ -39 & 27 & 6 & -66 & 87 & 32 & -15 & -36 & 82 \\ 89 & 40 & -17 & -44 & -29 & -31 & 55 & -52 & 3 \\ 81 & -60 & 86 & 42 & 43 & 29 & 95 & -70 & -26 \end{matrix}$</td><td>$\mathbf{b} = \begin{matrix} 43 \\ 84 \\ -7 \\ 38 \\ 59 \\ 93 \\ -5 \\ 73 \\ -10 \end{matrix}$</td><td rowspan="3">2, 5
1, 3</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\mathbf{A} = \begin{matrix} 688 & -245 & -382 & 56 & 166 & -290 & -5 & -49 & -347 & -279 \\ -245 & 652 & 382 & 235 & -226 & -28 & -73 & -132 & -148 & 96 \\ -382 & 382 & 705 & 96 & -41 & 43 & -30 & 198 & 182 & 193 \\ 56 & 235 & 96 & 611 & 43 & 280 & -289 & -158 & 74 & 179 \\ 166 & -226 & -41 & 43 & 166 & -4 & -51 & 143 & 77 & 66 \\ -290 & -28 & 43 & 280 & -4 & 677 & 107 & -151 & 395 & 183 \\ -5 & -73 & -30 & -289 & -51 & 107 & 691 & -158 & 128 & -74 \\ -49 & -132 & 198 & -158 & 143 & -151 & -158 & 498 & 36 & 223 \\ -347 & -148 & 182 & 74 & 77 & 395 & 128 & 36 & 668 & 299 \\ -279 & 96 & 193 & 179 & 66 & 183 & -74 & 223 & 299 & 751 \end{matrix}$</td><td>$\mathbf{b} = \begin{matrix} -324 \\ 79 \\ 671 \\ 553 \\ -120 \\ -68 \\ -173 \\ 15 \\ 644 \\ 22 \end{matrix}$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$\mathbf{A} = \begin{matrix} 949 & 134 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 53 & 994 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -339 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 332 & -858 & -373 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & -128 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 72 & 227 & 88 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -267 & 863 & -208 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 74 & 796 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 72 & 226 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -55 & -596 \end{matrix}$</td><td>$\mathbf{b} = \begin{matrix} -144 \\ 933 \\ 240 \\ 391 \\ 441 \\ -306 \\ 34 \\ 113 \\ -687 \\ 124 \end{matrix}$</td></tr>
</table>

Питання для самоперевірки

1. Дати визначення абсолютної та відносної похибки.
2. Чому дорівнює абсолютна похибка суми/різниці аргументів?
3. Чому дорівнює відносна похибка суми/різниці/добутку/частки аргументів?
4. Як формулюється зворотна задача теорії похибок?
5. Які Ви знаєте статистичні підходи для врахування похибок результатів арифметичних операцій?
6. Чи виконуються властивості асоціативності та дистрибутивності в машинній арифметиці? Обґрунтуйте відповідь.
7. Які Ви знаєте норми векторів та матриць?
8. Дати визначення міри обумовленості системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
9. В чому полягає особливість методу Гаусса з вибором головного елемента по стовпцю?
10. Що таке матриця перестановок?
11. Як знайти обернену матрицю використовуючи метод Гаусса?
12. Яка головна перевага методу *LU*-факторизації розв'язання СЛАР порівняно з методом Гаусса?
13. Які існують схеми обходу матриці в методі *LU*-факторизації розв'язання СЛАР?
14. Яка головна ідея методу пошуку оберненої матриці на основі *LU*-факторизації?
15. Чому метод *QR*-факторизації матриць розв'язання СЛАР ще називають методом відбиття?
16. В чому полягає головна ідея методу відбиття?
17. Що таке матриця Хаусхолдера? Як вона будується? Які властивості має?

18. Для якого типу матриць коефіцієнтів метод квадратних коренів показує найкращі результати?
19. Якщо метод квадратних коренів застосовувати до від’ємно визачених квадратних матриць, то які проблеми можуть виникнути?
20. Яка матриця називається ермітовою, ермітово-спряженою, унітарною?
21. Для якого типу СЛАР використовується метод прогонки?
22. В чому полягає суть прямої та зворотної прогонки?
23. Коли прогонка є коректною та стійкою?
24. Вивести обчислювальні формули для п’ятидіагональної прогонки.
25. В чому полягає ідея методу обертань?
26. Яким чином розв’язуються СЛАР з комплексними коефіцієнтами?
27. Які Ви знаєте методи знаходження визначників в процесі розв’язання СЛАР?

Рекомендована література

1. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов: Учебник для вузов. В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.: ил.
2. *Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М.* MatLab 7: программирование, численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.: ил.
3. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.

Лабораторна робота №3. Ітераційні методи розв'язання СЛАР та обчислення оберненої матриці

Equation Section (Next)

Мета роботи: набути вміння та навички використання ітераційних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь і обчислення обернених матриць та застосування систем комп'ютерної математики, а також закріплення, поглиблення й узагальнення теоретичних знань щодо методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь і обчислення обернених матриць.

Теоретичні відомості

Альтернативою прямим методам є ітераційні методи. Вони засновані на багатократному уточненні $x^{(0)}$ – наближено заданого розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

В загальному випадку канонічна форма однокрокового ітераційного метода має такий вигляд:

$$\mathbf{V}_k \frac{\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}}{\tau_k} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}, \tag{3.1}$$

де $\mathbf{V}_k$ – матриця, що задає ітераційний метод, τ_k – ітераційний параметр.

3.1. *Метод простих ітерацій*

Система стандартного вигляду

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{3.2}$$

де $\mathbf{A} = \left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ – $n \times n$-матриця, а $\mathbf{x} = \left(x_1;\ldots;x_n\right)^T$ та $\mathbf{b} = \left(b_1;\ldots;b_n\right)^T$ – n-вимірні вектор-стовпці, тим чи іншим способом може бути перетворена до еквівалентної системи вигляду

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{c}, \tag{3.3}$$

де $\mathbf{x}$ – вектор невідомих, а $\mathbf{M}$ та $\mathbf{c}$ – деякі нові матриця та вектор відповідно.

Наближений розв'язок системи (3.3) знаходиться, як ліміт послідовності

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}\,,\ k = 0,1,2,\ldots. \qquad (3.4)$$

Ітераційний процес, що починається з деякого вектора $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)};\ldots;x_n^{(0)}\right)^T$ називається *методом простих ітерацій.*

Необхідною та достатньою умовою збіжності метода простих ітерацій (3.4) *при будь-якому початковому значенні вектора* $\mathbf{x}^{(0)}$ *до розв'язку* $\mathbf{x}$ *системи* (3.3) *є вимога, щоб всі власні числа* $\lambda_{\mathbf{B}}$ *матриці* $\mathbf{M}$ *були за модулем менше* 1.

Іншою умовою збіжності обчислень методом простих ітерацій є умова, щоб норма матриці $\mathbf{M}$ була меншою від одиниці: $\|\mathbf{M}\| < 1$.

Нехай $\|\mathbf{M}\| \le q < 1$. *Тоді при будь-якому початковому векторі* $\mathbf{x}^{(0)}$ *метод простих ітерацій* (3.4) *збігається зі швидкістю не менше геометричної прогресії до єдиного розв'язку* $\mathbf{x}$ *задачі* (3.3) *та при всіх* $k \in \mathbb{N}$ *справедливі оцінки похибки:*

1) *апріорна (від лат. a priory – перед проведенням експерименту):*

$$\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \le \frac{q^k}{1-q}\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\|;$$

2) *апостеріорна (від лат. a posteriory – на основі експерименту):*

$$\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|.$$

3.2. *Метод Якобі*

Після отримання умови якій має відповідати матриця коефіцієнтів перетвореної системи (3.3) для збіжності методу простих ітерацій (3.4), необхідно виконати перетворення системи (3.2) до вигляду (3.3) так, щоб ця умова виконувалась.

Подамо матрицю $\mathbf{A}$ системи (3.2) у вигляді

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{R},$$

де $\mathbf{D}$ – діагональна, а $\mathbf{L}$ та $\mathbf{R}$ – відповідно ліва та права суворо трикутна (тобто з нульовою діагоналлю) матриці. Тоді система (3.2) може бути записана у вигляді

$$\mathbf{Lx} + \mathbf{Dx} + \mathbf{Rx} = \mathbf{b} \tag{3.5}$$

або

$$\mathbf{Lx}^{(k)} + \mathbf{Dx}^{(k+1)} + \mathbf{Rx}^{(k)} = \mathbf{b}, \tag{3.6}$$

та якщо на діагоналі вихідної матриці немає нулів, то еквівалентною до (3.2) задачею виду (3.3) буде

$$\mathbf{x} = -\mathbf{D}^{-1}\left(\mathbf{L} + \mathbf{R}\right)\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}. \tag{3.7}$$

Заснований на такому перетворенні системи (3.2) до вигляду (3.3) метод простих ітерацій (3.4) називають *методом Якобі*[1]. У векторно-матричних позначення він визначається формулою

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}\left(\mathbf{L} + \mathbf{R}\right)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b},\ k = 0,1,2,\ldots. \tag{3.8}$$

Запишемо метод Якобі (3.8) розв'язання системи (3.2) у розгорнутому вигляді:

$$x_i^{(k)} = -a_{ii}^{-1}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right); \qquad i = 1,2,\ldots,n; \quad k = 0,1,2\ldots. \tag{3.9}$$

---

[1] Якобі Карл Густав Якоб (1804 – 1851) – німецький математик.

Теорема. *У випадку діагонального домінування в матриці* **A** *системи* (3.2) *метод Якобі* (3.8) *збігається*.

Зрозуміло, що не кожна система відповідає вимозі діагонального домінування, але майже кожна система, визначник якої відрізняється від нуля, може бути приведена до вигляду, де ця умова виконується.

В загальному випадку це виконується таким чином: рівняння в якому є коефіцієнт більший за модулем ніж сума інших коефіцієнтів переставляються у такий рядок нової системи, щоб цей коефіцієнт став діагональним; рівняння, що не ввійшли в нову систему будуються за допомогою лінійно незалежних комбінацій з рівнянь, які увійшли в нову систему та які залишилися, при цьому кожне з невикористаних рівнянь має увійти хоча б в одну з лінійно незалежних комбінацій.

3.3. *Метод Зейделя*

Аналізуючи формулу (3.9) легко помітити, що при обчисленні $x_{n+1}^{(k)}$ значення $x_{n+1}^{(j)}$ для $j<k$ вже визначені.

Ітерації за методом Зейделя[2] відрізняються від простих ітерацій (3.4) тим, що при обчисленні i-ої компоненти $(k+1)$-го наближення відразу використовуються вже знайдені значення перших $i-1$ компонент $(k+1)$-го наближення.

[2] Зейдель Філіп Людвіг (1821 – 1896) – німецький астроном та математик.

Таким чином, якщо система (3.2) тим або іншим способом приведена до системи (3.3) з матрицею коефіцієнтів $\mathbf{M} = \left\{ m_{i\,j} \right\}_{i,\,j=1}^{n}$ та вектором вільних членів $\mathbf{c} = \left\{ c_i \right\}_{i=1}^{n}$, то наближення до її розв'язку за методом Зейделя визначається системою рівностей

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} m_{i\,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} m_{i\,j} x_j^{(k)} + c_i\,, \quad i = 1,2,\ldots,n\,, \tag{3.10}$$

де $k = 0,1,2,\ldots$, а $x_i^{(0)}$ – компоненти заданого початкового вектора $\mathbf{x}^{(0)}$.

Розглянемо докладніше випадок коли приведення системи (3.2) до вигляду (3.3) засновано на поданні (3.5), тобто коли метод Зейделя є модифікацією метода Якобі. В цьому випадку система рівнянь (3.10) приймає наступний вигляд:

$$x_i^{(k+1)} = -a_{i\,i}^{-1} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i\,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i\,j} x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = 1,2,\ldots,n\,, \tag{3.11}$$

де $k = 0,1,2,\ldots$, а $x_i^{(0)}$ – компоненти заданого початкового вектора $\mathbf{x}^{(0)}$.

Метод (3.11), який є окремим випадком більш загальної форми метода Зейделя (3.10) інколи називають методом Некрасова.

У векторно-матричній формі метод Некрасова має вигляд:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\left(\mathbf{L} + \mathbf{D}\right)^{-1} \mathbf{R}\mathbf{x}^{(k)} + \left(\mathbf{L} + \mathbf{D}\right)^{-1} \mathbf{b}\,. \tag{3.12}$$

Якщо система (3.2) *– нормальна, то метод Некрасова збігається.*

3.4. *Метод релаксації*

У випадках, коли застосування оцінок похибок в методах простих ітерацій та Зейделя неможливо через відсутність констант $q < 1$ та $t < 1$, що обмежують зверху будь-які норми матриці ітерування відповідного метода, ці методи не ефективні та більш того, як можна довести, малонадійні через повільну збіжність.

Метод релаксації є узагальненням метода Зейделя. Він дозволяє інколи в декілька разів прискорити збіжність ітераційної послідовності.

Розглянемо докладніше метод релаксації, коли окремим випадком метода Зейделя є метод Некрасова, тоді

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \left(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L}\right)^{-1}\left(\left(1-\omega\right)\mathbf{D} - \omega\mathbf{R}\right)\mathbf{x}^{(k)} + \omega\left(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{b}. \qquad (3.13)$$

Формула для проведення покоординатних обчислень для метода релаксації має наступний вигляд:

$$x_i^{(k+1)} = \left(1-\omega\right)x_i^{(k)} + \omega a_{ii}^{-1}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right). \qquad (3.14)$$

Встановлено, що для збіжності процесу (3.14) необхідно, щоб $\omega \in \left(0,2\right)$. Для деяких класів СЛАР ця вимога до параметра релаксації є достатньою.

Теорема Островського-Рейча. *Для нормальної системи* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *метод релаксації* (3.14) *збігається при будь-якому* $\mathbf{x}^{(0)}$ *та будь-якому* $\omega \in \left(0,2\right)$.

Оскільки ітераційний процес (3.14) містить параметр, природно розпорядитися так, щоб збіжність послідовності $\mathbf{x}^{(k)}$ була найбільш швидкою. Очевидно, що це досягається в тому випадку, коли спектральний радіус (найбільше власне число) матриці $\mathbf{M} = \left(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L}\right)^{-1}\left(\left(1-\omega\right)\mathbf{D} - \omega\mathbf{R}\right)$ буде мінімальним. В загальному випадку задача знаходження оптимального значення $\omega = \omega_0$ не розв’язана, та в практичних розрахунках застосовується метод проб та помилок. Однак для окремих важливих класів задач такі розрахунки вдається виразити через власні числа матриці $\mathbf{D}^{-1}\left(\mathbf{L} + \mathbf{R}\right)$. Відмітимо, що цим оптимальним значенням є $\omega_0 \in \left(1,2\right)$.

При значеннях $\omega \in (1,2)$ метод (3.14) називають *методом послідовної верхньої релаксації*.

Завдання на лабораторну роботу

Розробити програму на мові програмування C# у середовищі розробки Visual Studio 2013 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та дозволяти виконувати наступне:

1. Взяти в якості матриці $\mathbf{A}$ першу задану за варіантом матрицю (завдання з лабораторної роботи 2) та знайти $\mathbf{A}^{-1}$, з точністю $\varepsilon \le 10^{-5}$, одним із заданих ітераційних методів (третя цифра у стовпчику методи), де

0	Метод Шульца другого порядку
1	Метод Шульца третього порядку
2	Метод Шульца-Зейделя

   та знайти розв'язок СЛАР $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ за формулою $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

2. Розв'язати, три задані за варіантом (завдання з лабораторної роботи 2), системи лінійних алгебраїчних рівнянь, з точністю $\varepsilon \le 10^{-5}$, одним із заданих ітераційних методів (четверта цифра у стовпчику методи), де

0	Метод Якобі
1	*LR*-метод Некрасова (частковий випадок метода Зейделя з одностороннім проходом на кожній ітерації)
2	*RL*-метод Некрасова (частковий випадок метода Зейделя з одностороннім проходом на кожній ітерації)
3	Метод Некрасова з двостороннім проходом на кожній ітерації

3. Розв'язати, три задані за варіантом, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, з точністю $\varepsilon \le 10^{-5}$, методом релаксації при різних значеннях параметра $\omega \in (0, 2)$. Для кожного значення ω,

від $\omega_0 = 0.1$ до $\omega_1 = 1.9$ з кроком 0.05, розв'язати задану за варіантом першу систему та побудувати графік залежності кількості ітерацій, яка необхідна для заданої точності, від значення ω.

4. Пункти 1-3 виконати двома способами: у Visual Studio 2013 (або вище) у віконному режимі на мові програмування C# та в одному з математичних пакетів (MatLab 7.0 / MathCAD 15.0 / Mathematica 7.0 / Maple 14.0 (або вище). Реалізуючи поставлені задачі на *C# не дозволяється використовувати спеціальні функції для обробки матриць та векторів*, тобто необхідно реалізувати розв'язання СЛАР шляхом покоординатних обчислень. Реалізуючи поставлені задачі *у MatLab/MathCAD/Mathematica/ Maple дозволяється використовувати будь-які векторно-матричні оператори*, але таким чином, щоб завдання було виконане запропонованим за варіантом методом. При вирішені поставлених задач необхідно виводити на екран всі проміжні обчислення.

5. При виконанні завдань сформульованих в п.4 провести заміри часу роботи алгоритмів для кожного середовища розробки та звести отримані результати до таблиць. Обґрунтувати отримані результати та зробити висновки.

Додаткове завдання

1. На будь-якій із запропонованих мов програмування написати програму зі зручним інтерфейсом, яка буде дозволяти:
   - приводити довільну квадратну матрицю до діагонального домінування;
   - формувати довільну матрицю заданої розмірності (не менше 100x100), яка може бути приведена до діагонального домінування.

2. За допомогою програми розробленої в п.1 додаткового завдання сформувати матрицю 100x100 та відповідний вектор вільних членів і розв'язати отриману СЛАР двома будь-якими прямими методами та двома будь-якими ітераційними методами. Провести заміри часу роботи алгоритмів. Зробити висновки.

3. Розв'язати СЛАР з п.2 додаткового завдання за допомогою оператора "\" та функції *linsolve* в *MatLab*. Провести заміри часу роботи алгоритмів. Зробити висновки.

4. За допомогою програми розробленої в п.1 додаткового завдання сформувати 5 матриць 100x100 (симетричну від'ємно визначену, симетричну додатно визначену, тридіагональну, нижню трикутну та верхню трикутну) та 5 відповідних їм векторів вільних членів і розв'язати отримані СЛАР за допомогою оператора "\" та функції *linsolve* в *MatLab* (при роботі з функцією *linsolve* необхідно коректно встановити всі необов'язкові параметри). Провести заміри часу роботи алгоритмів. Зробити висновки.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт має включати:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підгрунття для виконання другої частини розрахунково-графічної роботи: Цей розділ має містити використані математичні формули при виконанні другої частини РГР.
3. Матрицю $\mathbf{A}^{-1}$, отриману заданим за варіантом різновидом метода Шульца:

Назва методу

C#	MatLab/MathCAD/Mathematica/Maple

4. Значення коренів, заданих за варіантом, систем лінійних алгебраїчних рівнянь отриманих кожним з прямих методів (взяти таблицю з першої частини РГР):

СЛАР № ___

Метод	C#	MatLab/MathCAD/Mathematica/Maple

5. Значення коренів, заданих за варіантом, систем лінійних алгебраїчних рівнянь отриманих кожним з ітераційних методів:

СЛАР № ___

Метод	C#	MatLab/MathCAD/Mathematica/Maple

6. Час роботи алгоритмів, що реалізують прямі та ітераційні методи знаходження розв’язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

СЛАР № ___

Метод	C#	MatLab/MathCAD/Mathematica/Maple

7. Графік залежності кількості ітерацій, яка необхідна для заданої точності розв’язання СЛАР методом релаксації, від значення ω.
8. Висновки. У висновках має бути наведено ґрунтовний аналіз отриманих результатів за декількома критеріями, порівняння очікуваних теоретично результатів з отриманими практично результатами, пояснено з теоретичної точки зору отримані часові показники роботи алгоритмів, що реалізують ітераційні методи розв’язання СЛАР, надано ґрунтовні рекомендації по вибору параметра в методі релаксації для різного типу СЛАР, а також порівняння результатів отриманих для прямих методів з результатами отриманими для ітераційних методів та їх обгрунтування.

Варіанти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №
1	3
2	8
3	25
4	26
5	1
6	27
7	14
8	7
9	29
10	28
11	12
12	18
13	11
14	30
15	17

№ за списком викладача	Варіант №
16	22
17	21
18	4
19	9
20	15
21	23
22	2
23	20
24	5
25	13
26	24
27	6
28	19
29	10
30	16

Питання для самоперевірки

1. Яка канонічна форма однокрокового ітераційного методу?
2. Назвіть умови збіжності методу простих ітерацій.
3. Сформулювати лему Ноймана та частковий випадок теореми Банаха.
4. Яка апріорна та апостеріорна оцінка похибки при розв’язанні СЛАР методом простих ітерацій?
5. Пояснити процес зведення СЛАР до вигляду придатного для застосування методу простих ітерацій, тобто процес τ-параметризації.
6. В чому полягає властивість самокорегованості методу простих ітерацій?
7. Яка умова збіжності методу Якобі? Обгрунтувати її.
8. В чому полягають відмінності однопрохідного та двопрохідного метода Гаусса-Зейделя?
9. Яка умова збіжності метода Гаусса-Зейделя?
10. Яка СЛАР називається нормальною?
11. Чи є метод Гаусса-Зейделя частковим випадком методу релаксації? Відповідь обґрунтувати.
12. Що називають параметром релаксації?
13. Сформулювати теорему Островського-Рейча.
14. Які існують різновиди методу релаксації?
15. На чому ґрунтується основна ідея методів розв’язання СЛАР варіаційного типу?
16. Які недоліки обчислення оберненої матриці на основі леми Ноймана та часткового випадка теореми Банаха?
17. Записати ітераційні формули для всіх різновидів метода Шульца пошуку оберненої матриці.

18. Модифікацією якого методу пошуку оберненої матриці є метод Шульца-Зейделя?
19. Які існують рекомендації по вибору початкового наближення в методі Шульца пошуку оберненої матриці?
20. Коли доцільно застосовувати прямі методи розв'язання СЛАР, а коли ітераційні?
21. В чому полягає принципова відмінність між прямими та ітераційними методами розв'язання СЛАР?

Рекомендована література

1. *Демидович Б.П., Марон А.И.* Основы вычислительной математики. – М.: "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 664 с.: ил.
2. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: "Наука", 1978.
3. *Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М.* MatLab 7: программирование, численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.: ил.
4. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.